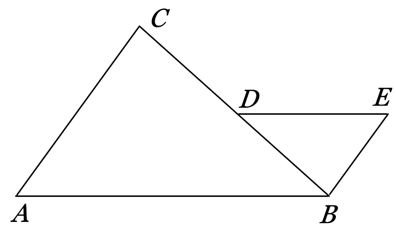
1987 – 1988 (Primera Convocatoria)

1. Descompón en factores las siguientes expresiones:

$M=2x^2+7x+6 \quad P=4x^2-9 \quad S=x^5-13x^3+36x \quad R=2x^2+4x \quad Q=4x^2 12x+9$

Calcula y simplifica $\dfrac{M}{P}:\dfrac{R}{Q}$

2. En un sistema de coordenadas rectangulares se dan los puntos A (2; 6), B(5; – 9) y C(– 2; 0).
   a) Representa gráficamente el triángulo ABC.
   b) Halla una ecuación paramétrica de la recta AC.
3. En la figura, $\overline{BE}//\overline{AC}$ y $\overline{DE}//\overline{AB}$
   a) Prueba que $\Delta ABC \sim \Delta BED$.
   b) Si $\overline{AC}=8{,}0\ cm$; $\overline{DE}=6{,}0\ cm$ y $\overline{BE}=4{,}8\ cm$. Halla la longitud de $\overline{AB}$.



4. Resuelve: $4\cos^2 x+8\,\mathrm{sen}x+1=0$
5. Dada la función definida por $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$
   a) Halla $f'(x)$.
   b) Halla el punto donde f tiene extremos locales.

1987 – 1988 (EIDE)

1. Dados:

$$M=9x^2+12x+4 \qquad P=6x^2+x-2 \qquad R=3x(a-b)+a-b$$
$$N=3x^3+2x^2 \qquad Q=4x^2-1$$

   a) Descompón en factores cada una de las expresiones dadas.
   b) Calcula y simplifica: $\left(\dfrac{2x^2}{N}-\dfrac{1}{M}\right):\dfrac{Q}{P}$
2. Dados los puntos A (-3; 5), B(5;-1) y C(-5;-6)

   a) Representa el ΔABC en un sistema de coordenadas rectangulares.
   b) Halla la ecuación paramétrica de la recta "r_1" que pasa por los puntos A y B.
   c) Halla la ecuación de la recta "r_2" que pasa por el vértice C y es perpendicular a "r_1".
   d) Determina las coordenadas del punto de intersección de "r_1" y "r_2".

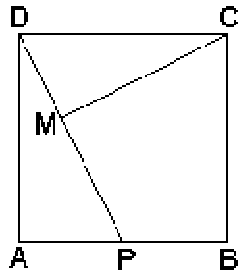
3. Del ΔABC se conoce $\angle ABC=71^o$ y $\angle BCA=64^o$ y en el ΔHIJ; $\angle HIJ=64^o$ y $\angle JHI=45^o$.
   a) Prueba que ΔABC y ΔHIJ son semejantes.
   b) Expresa la proporcionalidad de los lados de ambos triángulos.

4. Resuelve la ecuación: $\sqrt{2x-3}-\sqrt{x+2}+1=0$

5. Dada la función $f(x)=4x^3+15x^2-72x+1$
   a) Analiza su monotonía.
   b) Determina los valores de x para los cuales f(x) tiene un extremo local, hallando en cada caso el tipo de extremo.

1987 – 1988 (Segunda Convocatoria)

1. Dados:
$A=x^2-14x+49$, $B=x^2-x-42$, $C=x^2-49$, $D=2x^2+14x$, $E=8x^5-6x^3-27x$
   a) Descompón en factores cada una de las expresiones.
   b) Calcula y simplifica $\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{D}\right)\cdot\frac{A}{B}$



2. En la figura, ABCD es un cuadrado, P es el punto medio de $\overline{AB}$ y $\overline{CM}\perp\overline{DP}$.
   a) Prueba que $\Delta ADP \sim \Delta DMC$.
   b) Si, $A_{ABCD}=36\text{ cm}^2$, halla la longitud de $\overline{PD}$.

3. Determina la posición relativa entre la recta $2x+y+1=0$ y la circunferencia de ecuación $(x+3)^2+y^2=5$.

4. Dada la función definida por: $p(x)=\dfrac{9x^2+4}{4x^2-9}$
   a) Determina su dominio.
   b) Determina para qué valores de x los puntos correspondientes al gráfico de "p" están por debajo del eje "X".
   c) Analiza la monotonía.
   d) Halla los valores extremos de la función.

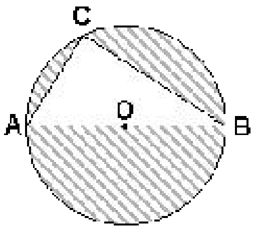
5. Dadas $f(x)=\sqrt{2x-3}+1$, $g(x)=\sqrt{x+2}$ y $h(x)=\tan x+\cot x-4\operatorname{sen}30^0$.
   a) Halla los valores de x para los cuales $f(x)=g(x)$.
   b) Halla los ceros de la función h en el intervalo $0<x<\dfrac{3\pi}{2}$.

1988 – 1989 (Primera Convocatoria)

1. Comprueba que: $\dfrac{A}{B}:\dfrac{C}{D}=\dfrac{3x+1}{x-4}$, si $A=9x^2-1$, $B=x^2+x-20$, $C=3x^2+14x-5$ y $D=x^2+10x+25$

2. Dadas las rectas: $r_1: 3x - 4y = 10$ $r_2: 2x - y = -5$
   a) Calcula el punto de intersección de r_1 y r_2.
   b) Di si son o no perpendiculares. Justifica.

3. En la figura el ΔABC está inscrito en la circunferencia de centro en O y diámetro $\overline{AB}$. Si $\overline{AC} = 12\,\text{cm}$ y $\overline{BC} = 5{,}0\ \text{cm}$, determina el área de la región rayada.



4. Resuelve: $2\cos^2 x + 5\operatorname{sen} x + 1 = 0$

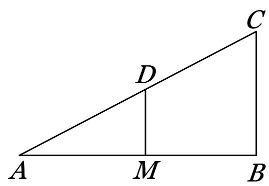
5. Sea $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{4x^2 + 1}$

   a) Determínela os ceros de *f*.
   b) Analiza la monotonía de *f*.
   c) Determina los extremos de *f*. Justifica.
   d) Diga si existe algún $x \in \Re$ tal que $f(x) \geq \dfrac{1}{4}$.

1988 – 1989 (Segunda Convocatoria)

1. Dados: $A = 49x^2 - 9$ $B = 7x^2 - 3x$ $C = 7x^2 + 32x - 15$
$D = x^2 + 8x + 15$ $E = x^3 + 4x^2 - 19x + 14$
a) Descomponga completamente en factores cada una de las expresiones anteriores.
b) Calcula y simplifica $\left(\dfrac{1}{B} - \dfrac{6}{A}\right) \cdot \dfrac{C}{D}$.
2. Dados A (-4;-1) y B (-8;-5)
 a) Escriba una ecuación no paramétrica de la recta que pasa por A y B.
 b) Halla las coordenadas de los puntos de intersección de la recta AB con la circunferencia $x^2 + y^2 = 17$

3. En la figura, ΔABC es rectángulo en B, D pertenece al segmento AC, M es el pie de la perpendicular trazada desde D hasta $\overline{AB}$.



   a) Pruebe que ΔABC ~ ΔADM y escriba la proporcionalidad entre sus lados homólogos.
   b) Si sabemos que $\overline{AB} = 9{,}0\ cm$, $\overline{AC} = 15\ cm$ y el área del triángulo AMD es 13 cm^2, calcula la longitud de $\overline{BC}$ y el área del cuadrilátero $MBCD$.

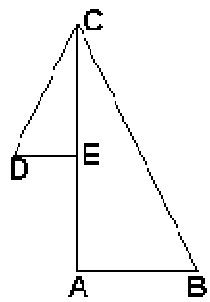
4. Resuelve la ecuación: $\cos 2x - \dfrac{1}{2}\cos x + \operatorname{sen}^2 x = 0 \quad \text{para} \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

5. Dada $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x+1}$

a) Determina el dominio de f.
b) Analiza la monotonía de f para $x > 1$. Justifica.
c) Determina los valores de x para los cuales la función tiene extremos locales y halla las imágenes correspondientes.

1988 – 1989 (Primera Convocatoria . Festival de Pyong Yang)

1. Dados: $A=6x^2-18x$, $B=x^2-4x+4$, $C=x^2-6x+8$, $D=3x^2-4x-20$ y $E=4x^5-37x^3+9x$
   a) Descompón en factores cada una de las expresiones dadas.
   b) Efectúa y simplifica $\left(\dfrac{A}{2x(x-2)}-\dfrac{x-2}{B}\right):\dfrac{D}{C}$



2. En la figura, $\overline{CA}\perp\overline{AB}$, $\overline{DE}\perp\overline{CA}$, $E\in\overline{CA}$ y $\overline{CA}$ es la bisectriz del $\angle BCD$.
   a) Prueba que $\Delta ABC \sim \Delta DEC$.
   b) Si, $\overline{AB}=12{,}0$ cm, $\overline{BC}=15{,}0$ cm y $\overline{DE}=9{,}0$ cm. Halla el área del ΔCDE.

3. Sean $f(x)=2x^2-x$, $g(x)=\sqrt{11x-6}$ y $h(x)=\sqrt{4x-5}-\sqrt{x-1}$.
   Determina:
   a) ¿Para qué valores de x se cumple que $f(sen\,x)=1$?
   b) Los valores de x tales que $g(x)=h(x)$.

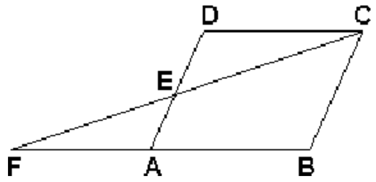
4. Sea $p(x)=\dfrac{x^2-5x}{2}$. Halla:
   a) Dominio de la función p.
   b) Intervalos donde las imágenes de p son positivas.
   c) Puntos de intersección del gráfico de p con los ejes de coordenadas.
   d) Extremos locales de la función p.

1988 – 1989 (Segunda Convocatoria . Festival de Pyong Yang)

1. Dados los polinómios: $M=25x^2-9$, $P=5x^2+3x$, $Q=x^2+8x+16$, $R=5x^2+17x-12$ y $S=x^3-3x^2-4x+12$.
   a) Descompón en factores dada uno.

b) calcula y simplifica: $\frac{M}{P}\cdot\frac{Q}{R}-\frac{x+5}{x-1}$.

2. Dadas las rectas r_{AB}: x + y – 2 = 0, r_{BC}: 7x – y – 46 = 0 y r_{AC}: x – 3y + 2 = 0.
   a) Determina loa coordenadas de B.
   b) Halla la pendiente de r_{AC}.
   c) Halla la pendiente de una recta paralela a r_{AC} y las coordenadas de un vector director.
   d) Escribe una ecuación paramétrica de una recta perpendicular a r_{AC}.



3. En la figura, $\{F\} = AB \cap EC$, ABCD es un paralelogramo y E es el punto medio de $\overline{AD}$.
   a) Prueba que ΔAEF~ ΔCDE.
   b) Si, $\overline{AB} = 40$ cm, $\overline{BC} = 30$ cm y $\overline{CE} = 50$ cm. Halla el perímetro del ΔAEF.

4. Resuelve la ecuación: $\sqrt{2x+5}-\sqrt{2x}=\sqrt{2x-3}$

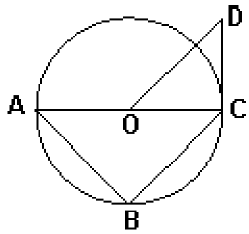
5. Dada la función definida por $f(x)=2x^3+5x^2-4x+12$. Determina:
   a) Monotonía y extremos de la función *f*.
   b) Ecuación cartesiana de la recta tangente a la curva de *f* en el punto x = 1.

1989 – 1990 (Primera Convocatoria)

1. Dados: $A=\frac{2x^2-9x-18}{x^2-36}$ y $B=\frac{x^2+12x+36}{4x^2+6x}$
   a) Calcula simplifica el cociente *B*.
   b) Halla el valor de ***x*** para el cual el valor numérico del resultado del inciso a) es **-1.**

2. Resuelve la siguiente ecuación: $cos2x-3\,cos\,x+sen^2x=-2$

3. Dados los puntos A(-1;-8) y B(3;8)
a) Halla una ecuación no paramétrica de la recta **"r"** que pasa por B y A
b) Determina las coordenadas de los puntos de intersección de **"r"** con $y^2 – 8x = 0$



4. En la circunferencia de centro O y diámetro $\overline{AC}$, B punto de la circunferencia,
   CB| |OD, OC $\perp$ DC
   a) Prueba que ΔABC y ΔOCD son semejantes
   b) Si $\overline{OD} = 13$ cm y $\overline{CD} = 5{,}0$ cm. Calcula el área del círculo.

5. Dada la función:

$$f(x)=x^3-2x^2+x-2$$

   a) Calcula sus ceros.
   b) Determina en qué intervalos la función es creciente y en cuál es decreciente.
   c) Halla los valores de x para los cuales la función tiene extremos locales.
   d) Especifica, según el caso, si hay máximo o mínimo local.

1989 – 1990 (Curso para trabajadores)

1. Simplifica la expresión $\dfrac{(a+b)^2-(ab+1)^2}{a^2-1}$. Evalúa el resultado para $b = -0{,}5$.
2. Dada la función definida por $f(x)=x^2+2x-3$.
   a) Calcula los ceros de f.
   b) Halla el vértice de la parábola y represéntala gráficamente.
3. Demuestra que para todos los valores de la variable α se cumple que:

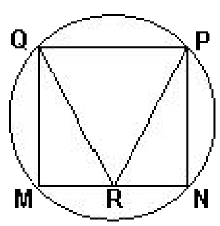
$$\frac{2\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)\cdot\cos(\pi+\alpha)\cdot\tan(\pi-\alpha)}{sen(\pi+\alpha)\cdot sen(\pi-\alpha)}=-2$$

4. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases}15(x+2)-20y=50\\20(x-3)-40(x-y)=20\end{cases}$
5. Halla el conjunto solución de la ecuación $\sqrt{2x+\sqrt{6x^2+1}}=x+1$

1990 – 1991 (Primera Convocatoria)

1. Sean: $A=\dfrac{2x^2+11x+5}{x^3+5x^2-4x-20}$ y $B=x^2-4$. Verifica que la expresión $A\cdot B+x^2$ se hace cero para un único valor de x.

2. En la figura aparece el cuadrado MNPQ inscrito en la circunferencia.

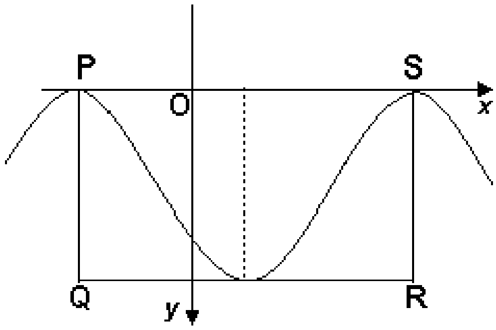


$\overline{MQ}=7{,}0$ cm , M, R y N puntos alineados.
   a) Calcula la longitud de la diagonal $\overline{NQ}$.
   b) Calcula la razón $\dfrac{A}{B}$, donde A es el área del círculo y B la del ΔPQR.

3. Sean las funciones: $f(x)=\sqrt{3x^2-13x+4}$ y $h(x)=x-4$
   a) Determina el dominio de f.
   b) Calcula las coordenadas de los puntos de intersección de los lados gráficos de las funciones f y h.

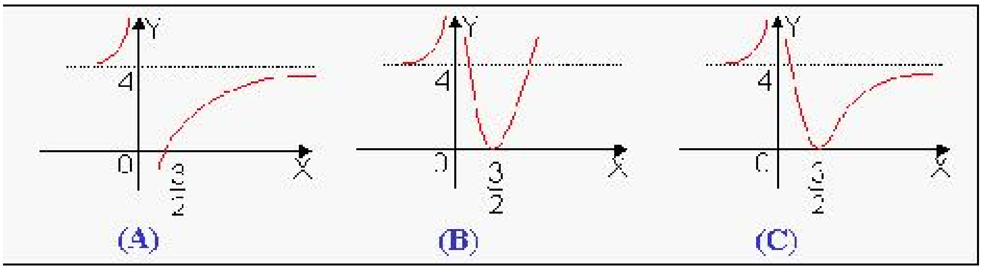
4. En el triángulo ABC rectángulo en A se conoce que B(1;1) y que las rectas que contienen a los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ son: r_{BC}: 3x - y - 2 = 0 y r_{AC}: x - 2y + 11 = 0. Halla las coordenadas de los vértices A y C.

5. En la figura aparecen un esbozo del gráfico de la función $f(x)=x^3-3x-2$ del rectángulo PQRS, cuyo lado $\overline{PS}$ está contenido en el eje "x".
   Si los puntos P y S pertenecen al gráfico de f y las rectas que contienen a lo segmentos $\overline{PS}$ y $\overline{QR}$ son tangentes a la curva. Calcula el área del rectángulo PQRS.



1990 – 1991 (Juegos Panamericanos HAB´91)

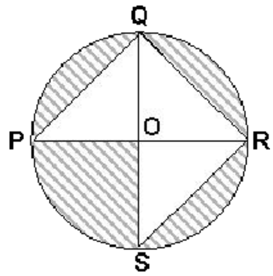
1. Resuelve la ecuación: $\dfrac{x^2+5x}{x^2+x-12}+\dfrac{x}{x-3}=1$
2. Una de las obras que se construyen para los Juegos Panamericanos es abastecida de arena por camiones de 8,0 m^3 y 4,5 m^3 de capacidad. Si en un día llegaron 33 camiones que transportaron 187 m^3 de arena. ¿Cuántos viajes de cada tipo llegaron a la obra ese día?
3. El ángulo de inclinación de las caras de una pirámide, de base cuadrada, es de 60°. Si el área de la base de la pirámide es A_B = 144 cm^2; halla su altura y calcula el volumen V y el área total A_T de la misma.
4. Dada la función definida por: $h(x)=\dfrac{(2x-3)^2}{x^2}$
   a) Halla las coordenadas del punto donde corta al eje X.
   b) Analiza la existencia de extremos locales.
   c) ¿Cuál es el gráfico que corresponde a la función h?



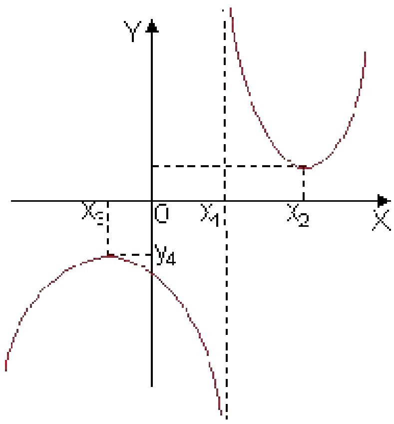
5. Dados los puntos: A(5;5) y B(– 5;5), extremos del diámetro de la circunferencia de ecuación $x^2 + (y-5)^2 = 25$.
   a) Halla la pendiente de la recta AB.
   b) Escribe la ecuación cartesiana de la tangente a la circunferencia en el punto A.
   c) Calcula las coordenadas de los puntos de intersección entre la circunferencia y la recta que pasa por el punto (10; 0) y es paralela al diámetro $\overline{AB}$.

1990 – 1991 (Segunda Convocatoria)

1. El largo de un terreno rectangular excede en 4,0 m al ancho. Si su área es 221 m^2, calcula el perímetro del terreno.
2. En la circunferencia de centro O y radio $\overline{OR}$, los diámetro $\overline{PR}$ y $\overline{QS}$, son perpendiculares,

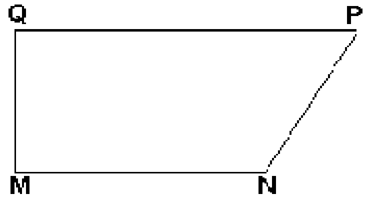


   a) Prueba que $\Delta PQR \sim \Delta ROS$.
   b) Clasifica el ΔPQR según sus lados y justifica la respuesta.
   c) Si la longitud de la circunferencia es 62,8 m. halla el área de la superficie sombreada.
3. Halla los puntos donde el gráfico de la función $f(x) = \cos 2x + \text{sen}^2 2x - 1$ corta al eje de las x.
4. Los puntos A (5; 4), B (–3; 2), C (–5; –6) y C (3; –4) son vértices consecutivos de un paralelogramo.
   a) Escribe una ecuación cartesiana de la diagonal $\overline{AC}$.
   b) Determina el punto de intersección de las diagonales del paralelogramo.
   c) muestra que ABCD es un rombo.
5. En la figura aparece el esbozo del gráfico de la función $f(x) = \dfrac{x^2+2}{2x-1}$
   a) Determina los valores de y_4, x_1, x_2 y x_3.
   b) Analiza la monotonía de f para $x < -3$.
   c) ¿Para qué valores de x, el ángulo de inclinación de la recta tangente a la curva en el punto $(x;\ f(x))$ es obtuso?



1991 – 1992 (Primera Convocatoria)
(Cambio de programas de estudios en Matemática)

1. Resuelve $2^{log\,x} \cdot 2^{log(2x+7)} = 4^{log(x+2)}$

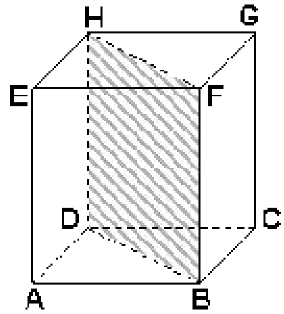


2. Un terreno, como se muestra en la figura, tiene forma de trapecio rectángulo. Calcular su área y perímetro conociendo que $\overline{MQ} = 3{,}00\,\text{hm}$, $\overline{MN} = 12{,}0\,\text{hm}$ y $\overline{NP} = 5{,}00\,\text{hm}$.

3. Sea $A(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2 - 4}$. Determina el conjunto de números reales no negativos para los cuales $A(x) \leq 0$.

4. El promedio de las notas de un estudiante en Física, Química y Matemática es 88 puntos. Si hubiera obtenido 100 puntos en Matemática el promedio sería 92 puntos; pero si en lugar de obtener 100 puntos en Matemática los hubiera alcanzado en Química, el promedio sería 94 puntos.¿Qué promedio hubiera alcanzado obteniendo 100 puntos en Física?

5. El ortoedro ABCDEFGH ha sido intersecado por un plano que pasa por los puntos B, D, H y F, como se muestra en la figura. El volumen del prisma ABDEFH es de 34,6 m^3 y su altura es de 10 m. El ángulo DBA mide 60º.
   a) Halla las dimensiones del ortoedro.
   b) Halla el área del cuadrilátero BDHF.

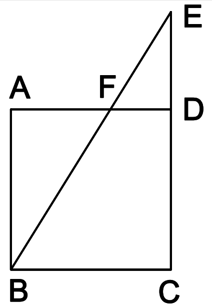


1991 – 1992 (Juegos Olímpicos Barcelona 1992)

1. Hallar las soluciones de la ecuación $log(cos2x + cos\,x) - log(senx + cos\,x) = 0$ en el intervalo $[0; \pi]$.

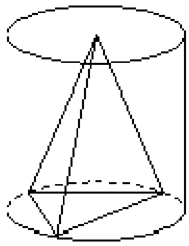
2. En un viaje de 930 km en bicicleta, un muchacho recorrió en los dos primeros días la misma distancia, el tercer día solo pudo recorrer la mitad de lo recorrido el día anterior y el cuarto, la tercera parte de lo recorrido el tercer día. Antes de proseguir el viaje, el quinto día, se sorprende cuando vio que solo le quedaba por recorrer 5,0 km y 200 m. ¿Qué distancia recorrió diariamente?

3. En la figura, ABCD es un cuadrado, $\overline{CE}$ y $\overline{BF}$ se cortan en el punto E, $F \in \overline{AD}$ y $5\overline{DE} = 3\overline{CE}$. Si llamamos A_T al área del ΔABF y A_C al área del cuadrilátero BCDF, calcula $k = \dfrac{A_T}{A_C}$.



4. Dadas las funciones definidas por las siguientes ecuaciones:
$f(x) = 3 - \sqrt{1 - x^2}$ y $g(x) = \sqrt{3}\,x + 3 - \sqrt{3}$. Determina los puntos de intersección de los gráficos de f y g cuyas abscisas son menores que las soluciones de la ecuación $3^{3x} + 1 = 27^x + 5^{(0,75-x)}$

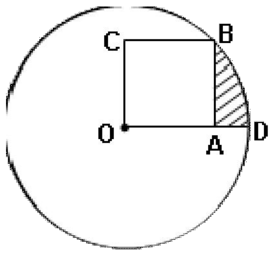
5. En el interior de un cilindro circular recto se encuentra una pirámide cuya base está inscrita en la base del cilindro, como se muestra en la figura. La base de la pirámide es un triángulo rectángulo de catetos 8,0 cm y 6,0 cm. Si el volumen de la pirámide es igual a 80 cm^3 y su altura es igual a la del cilindro, halla el volumen del cilindro.



1991 – 1992 (Segunda Convocatoria)

1. Halla los valores de x que satisfacen la ecuación: $9^{\left(\frac{1}{2} + \log_9 \sqrt{x+4}\right)} - 3^{\left(\log_3 \sqrt{x+1}\right)} = 5$

2. Calcula el área de la región sombreada, conociendo que la circunferencia de centro O, dada en la figura, tiene radio de longitud 1,0 m. OABC es un cuadrado, B y D son puntos de la circunferencia y A pertenece a $\overline{OD}$.

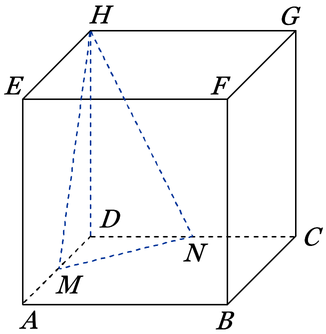


3. La función f cuyo dominio es R, satisface la ecuación: $2\cos^2 f(x) + 3\,sen\, f(x) = 3$ y para todo $x \in \Re$ se cumple que $\pi/2 < f(x) < \pi$. Verifica que f es una función constante.

4. Una empresa tiene un terreno rectangular de 1500 m^2 de superficie. Por necesidad de una obra social le piden que done una parte del mismo en una de las siguientes opciones:

La empresa escogió la primera variante ya que así cedía $50m^2$ menos. Determine las dimensiones originales del terreno.

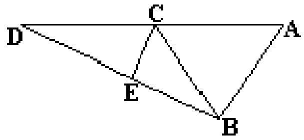
5. En la figura, ABCDEFGH es un cubo, M y N son puntos medios de $\overline{AD}$ y $\overline{CD}$ respectivamente. Si el área total del cubo es 24 dm^2. Calcula el volumen de la pirámide MNDH.



1992 – 1993 (Primera Convocatoria)

1. Halla los valores de x para los cuales las funciones definidas por $f(x)=3-3\,cos^2\,x$ y $g(x)=10\,sen\,x-7$ alcanzan el mismo valor.

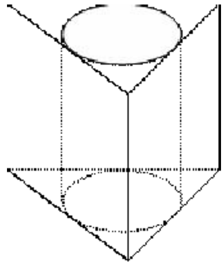
2. En la siguiente figura el punto C pertenece a AD y equidista de los vértices del ΔBAD; CE es la altura correspondiente al lado DB del ΔCDB.
   a) Demuestra que CDE y ADB son semejantes.
   b) Calcula el área del ΔCDE si se conoce que el área del ΔADB es 216 cm^2



3. Dos ciclistas se entrenaban para una competencia y en ese momento la suma de los cuadrados de sus pesos era igual a 6100 kg. Se conoce que uno de los ciclistas pesaba 10 kg. más que el otro. Finalmente uno de los ciclistas no pudo participar en la competencia. Durante el evento el ciclista participante bajó de peso la misma cantidad de kilogramos que aumentó el ciclista que no participó, alcanzando así ambos el mismo peso.
   Calcula el peso de los ciclistas después de celebrada la competencia.

4. Sean $f(x)=\dfrac{2x-5}{x+5}$ y $g(x)=\dfrac{1}{x-3}$. Determina para qué valores de x se cumple: $3^{\,f(x)} \geq 3^{g(x)}$.

5. Una pieza metálica, cuya forma es un prisma recto de base triangular, se rebaja en un torno hasta obtener una pieza cilíndrica, como se muestra en la figura. Calcula el volumen de esta pieza cilíndrica si:
   - las bases del prisma son triángulos equiláteros, cuyos lados tienen 2,0 dm de longitud;
   - la altura del prisma es 60 cm;
   - las bases del cilindro están inscritas en las bases del prisma.

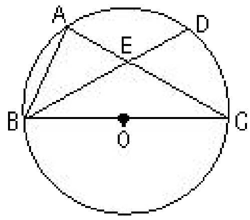


Datos: $\sqrt{2}=1{,}41$ $\sqrt{3}=1{,}73$ $\sqrt{5}=2{,}24$ $\pi=3{,}14$

1992 – 1993 (Segunda Convocatoria)

1. Halla los valores de x tales que: $f(x)=\sqrt{\dfrac{10-f(x)}{3}}$, siendo $f(x)=3x-4$

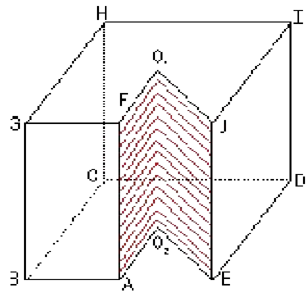
2. En la figura A, B y C son puntos de la circunferencia de centro O y radio r; $O\in\overline{BC}$, $\overline{AB}=r$, BD bisectriz del $\angle ABC$ y E es el punto de intersección de BD con AC.
Calcula EO en función del radio r.



3. Resuelve la ecuación: $log_{3x}\left(16x^2+13x-2\right)-log_7 49=0$

4. Dos fábricas producen el mismo tipo de piezas. Juan trabaja en una de ellas y David en la otra. Entre ellos tiene lugar el siguiente diálogo:
<u>Juan</u>: Si mi fábrica lograse aumentar su producción diaria en 19 piezas, entonces produciría cada día el doble de lo que tu fábrica produce diariamente.
<u>David</u>: ¿Tú conoces la producción diaria del país?
<u>Juan</u>: Sí, es de 87 piezas.
<u>David</u>: Pues si tu fábrica produjese diariamente 2 piezas menos, entonces el cuadrado de esa producción sumado con lo que el país produce diariamente sería 8 veces lo que nuestras dos fábricas juntas producen al día en estos momentos.
¿Cuántas piezas producen diariamente cada fábrica?

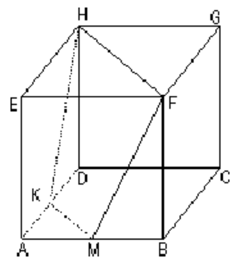
5. En la figura se representa un cuerpo que se obtuvo de un cubo de madera al que se le dio un corte de manera que:
O_1 y O_2 centros de las bases del cubo.
El cuadrilátero AFO_1O_2 pertenece al plano que contiene a O_1O_2 y que es paralelo al que pertenece la cara JIDE.
El cuadrilátero JEO_1O_2 pertenece al plano que contiene las aristas HC y JE.
Sabiendo que $\overline{ED}=2{,}0\text{ cm}$, calcula el área total del cuerpo representado.



1993 – 1994 (Primera Convocatoria)

1. Demuestre la siguiente identidad para los valores admisibles de la variable x
$\left(1-tan^2 x\right)\left(1-sen^2 x\right)=\left(1-\sqrt{2}\ senx\right)\left(1+\sqrt{2}\ senx\right)$

2. El cuerpo ABCDEFGH que se muestra en la figura es un prisma recto de base cuadrada. $\overline{KM}$ es la intersección con una base del prisma de un plano que pasa por la diagonal $\overline{HH}$ de la otra base, (KM || DB). Demuestra que $\Delta KDH=\Delta MBF$.



3. Sea: $f(x) = \sqrt{x+1}$

   Halla todos los valores de t para los que se cumple $f(2t) - f(t-1) = f(t-4)$.

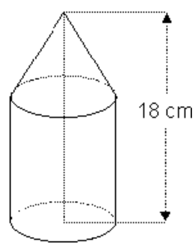
4. De un trapecio de 49 cm^2 de área se conoce que la base menor mide 4,0 cm y que la base mayor excede en 3,0 cm a la altura. Calcula el área que tendría el trapecio si la base mayor fuese 2,0 cm más corta.

5. El cuadrilátero PQRS se encuentra situado en el plano XY y es la base de una pirámide recta cuyo vértice superior se encuentra sobre la parte positiva del eje z de un sistema de coordenadas cartesianas en el espacio. Los vértices P y R son simétricos respecto al origen de coordenadas y lo mismo sucede con los vértices Q y S. Se conoce que P(0,-3,0) y
   S (-5, 0, 0) y que el volumen de la pirámide es de 90 u^3.
   Calcula las coordenadas del vértice superior.

1993 – 1994 (Segunda Convocatoria)

1. Resuelve la ecuación: $\log\left(1+\sqrt{x+1}\right) = 3\log\sqrt[3]{x-4}$

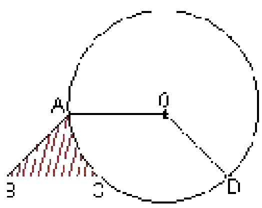
2. En la figura aparece representado un cuerpo formado por un cilindro circular recto y un cono circular recto, cuyas bases tienen igual radio. La altura total del cuerpo es 18 cm.
   Halla la altura que tiene que tener el cono para que se cumpla:
   $$\frac{\text{Volumen del cilindro}}{\text{Volumen del cono}} = \frac{3}{2}$$



3. Sean las funciones: $f(x) = 2^{3\,sen x - cos^2 x}$ y $g(x) = 3x - 4$. Determina los valores de x para los cuales se cumple que $f(x) = g(4)$.

4. Las tres cifras de un número suman 13. Si del número se resta 270 se obtiene otro número de tres cifras en el cual resultan intercambiadas la cifra de las centenas y de las decenas, pero se conserva la cifra de las unidades. El número de dos cifras formado por la cifra de las decenas y la de las unidades del número original es igual a 6 veces la cifra de las centenas. ¿Cuál es el número?

5. En la figura A, C y D son puntos de la circunferencia de centro O y radio r = 12 cm. El cuadrilátero ABDO es un trapecio isósceles y $\angle ODC = 60°$. Calcula el área sombreada.



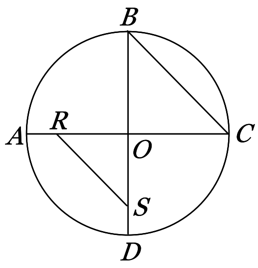
1994 – 1995 (verificar)

1. Resuelve la ecuación: $2\ sen2x\ cot\,x - cos2x = 3\ cos\,x$

2. En la figura los arcos *AB* y *BC* son iguales y $RS // BC$, $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son diámetros de la circunferencia de centro *O*.

   R es un punto de $\overline{AC}$ y S es un punto de $\overline{BD}$ tales que $\frac{\overline{AB}}{\overline{RO}} = \frac{3}{2}$.

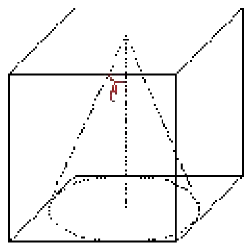
   Demuestra que $\frac{Área\ del\,\Delta ROS}{Área\ del\,\Delta ABC} = \frac{4}{9}$



3. Un terreno rectangular tiene 30 m de ancho y 50 m de largo. ¿En cuántos metros debe disminuirse el ancho y en cuántos aumentarse el largo para que el perímetro aumente en 30 m, sin cambiar el área?

4. Sean: $A = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x + 8}$ y $B = \frac{1}{x^4 - 1}$. Halla el mayor número entero negativo x para el cual se cumple $A \cdot B \leq 0$.

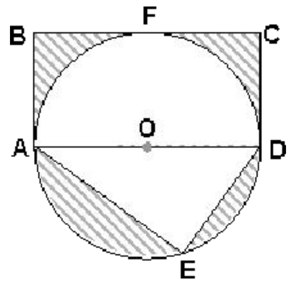
5. En la figura se tiene un prisma recto de base cuadrada en el cual se ha inscrito un cono. El área total del prisma es 112 dm^2 y el ángulo que forma la generatriz del cono con la altura es θ= 21,8º. Calcule el volumen del cono.



1994 – 1995 (Primera Convocatoria)

1. Dada la función $f(x) = \frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^2 - 4}$. determina los valores los valores reales de x para los cuales se cumple que $f(x) \geq 0$.

2. En la figura, $\overline{AD}$ es el diámetro y E es un punto de la circunferencia de centro O. La recta BC es tangente a la circunferencia en F y ADCB es un rectángulo. Calcula el área de la región sombreada, conociendo que; $\overline{AE} = 16$ cm y $\overline{DE} = 12$ cm.

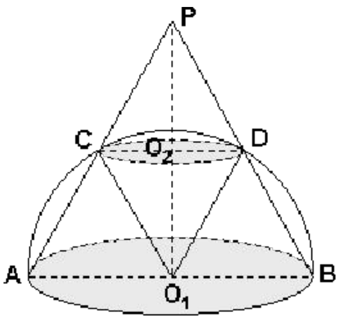


3. En un mercado agropecuario hay dos sacos que contienen 174 kg de arroz. Si del saco más pesado se saca el 25% del arroz que contiene y se echa en el otro, entonces ambos sacos tendrían la misma cantidad de arroz. ¿Cuántos kg de arroz contiene cada saco?

4. Sea la ecuación $4sen^2 x - 2(k+1)senx + 1 = 0$; $0^0 \leq x \leq 90^0$.

   a) Halla las soluciones de la ecuación para $k = \frac{3}{2}$.

   b) ¿Para qué valores positivos de k, la ecuación tiene una sola solución?



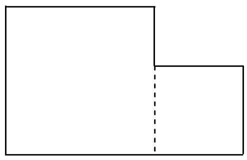
5. Una semiesfera de diámetro $\overline{AB}$ es cortada por un plano paralelo al plano de la base con centro en O_1 y diámetro $\overline{AB}$. El plano determina, sobre la semiesfera, un círculo de centro O_2 y diámetro $\overline{CD}$.
   Tomando como base el círculo de centro en O_2, se construyen dos conos: uno de vértice en O_1 y otro en el punto $P = AC \cap BD$. El círculo que tiene centro en O_1 y diámetro $\overline{AB}$ tiene un área de 314 m^2 y $\angle O_2O_1D = 30^{0}$.
   Calcula el volumen del cono con vértice en O_1 y altura $\overline{PO_2}$

1994 – 1995 (Segunda Convocatoria)

1. Resuelve la ecuación: $\log_2\left(3^{k-1} - 11\right) = 1 + \log_2\left(3^{k-1} - 1\right)$

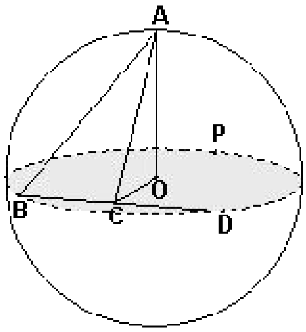
2. En un sistema de coordenadas en el plano se ha representado el rectángulo ABCD. Se conoce que A(0, -1), B(3, -2) y C(4, 1).
   a) Demuestra que ABCD es un cuadrado.
   b) Escribe una ecuación de la recta AD.
   c) Halla las coordenadas del vértice D.

3. Con dos cuadrados se forma una figura de seis lados como se muestra en el dibujo. Calcula las longitudes de los lados de los cuadrados sabiendo que la figura obtenida tiene 233 cm^2 de área y 68 cm de perímetro.



4. Halla todos los pares (x, y) con $0 \leq x \leq \pi/2$; $\pi/2 \leq y \leq \pi$ que satisfacen el sistema
$$\begin{cases} y - 2x = 0 \\ senx + cos\, y = 1 \end{cases}$$

5. - En la figura $\overline{AO}$ es radio de la esfera de centro O y es perpendicular al plano que pasa por O determinado por los puntos B, P y D de la esfera. C es un punto de $\overline{BD}$, $\overline{OC} \perp \overline{BD}$ y $\angle BAC = 30°$.



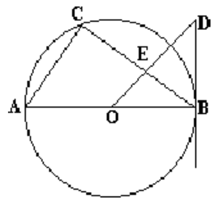
Demuestre que:

$$\frac{\text{Área del círculo que pasa por } B, P \text{ y } D}{\text{Área del } \Delta ABC} = \frac{4\sqrt{3}\pi}{3}$$

1995 – 1996 (Primera Convocatoria)

1. Demuestra la siguiente identidad para los valores admisibles de la variable:
$$\frac{\cos 2x + 2\cos x + 1}{\cos x(\cos x + 1)} = 2$$

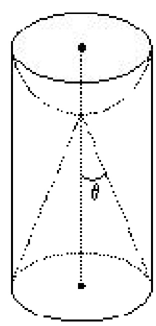
2. En la figura A, B y C son puntos de la circunferencia de centro O. $\overline{AB}$ es diámetro y $OD \perp CB$ en E. $\overline{DB}$ es tangente a la circunferencia en B.
   a) Demuestra que ΔABC y ΔDBO son semejantes.
   b) Demuestra que $\overline{CB} \cdot \overline{OB} = \overline{AC} \cdot \overline{DB}$.



3. Sean las funciones: $f(x) = 4^{\log\sqrt{2x^2+7x} - \log\sqrt{x}}$ y $g(x) = 16^{\log\sqrt{x+2}}$. Determina los valores de x para los cuales ambas funciones alcanzan el mismo valor.

4. Dos fábricas debían producir entre ambas, según sus respectivos planes de producción, 360 bicicletas. La primera de ellas cumplió su plan al 112% y la segunda al 110% y entre las dos produjeron 400 bicicletas.
   a) ¿Cuál era el plan de producción de cada fábrica?
   b) ¿Cuántas bicicletas produjo cada fábrica?

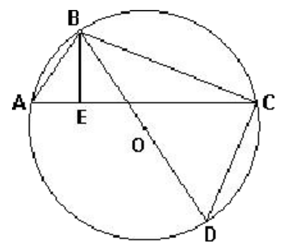
5. En la figura se representa un cuerpo formado por un cilindro circular recto de altura H, un cono de altura h y una semiesfera de radio r. Las bases del cilindro son las bases del cono y la semiesfera respectivamente. El vértice del cono es un punto de la semiesfera. El volumen del cilindro es 471 cm^3. La generatriz del cono y la altura forman un ángulo θ = 78, 7°. Calcula el volumen del cono.



Datos: $\sqrt{2} = 1{,}41$; $\sqrt{3} = 1{,}73$; $\sqrt{5} = 2{,}24$; $\pi = 3{,}14$
sen 78,7° = 0,981 ; cos 78,7° = 0,196 ; tan 78,7° = 5,00

1995 – 1996 (Segunda Convocatoria)

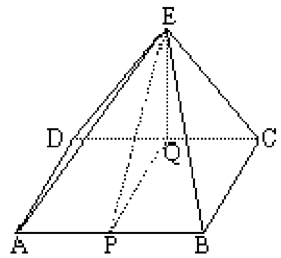
1. Resuelve la ecuación: $\sqrt{\sqrt{4x+16}-x}=1$



2. En la figura A, B, C y D puntos de la circunferencia.
   $\overline{DB}$ diámetro y $AC \perp BE$.
   a) Demuestre que $\Delta BCD \sim \Delta ABE$.
   b) Demuestre que $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = \overline{BD} \cdot \overline{BE}$.

3. Halle los valores de x ($0 \leq x \leq \pi$) que satisfacen la ecuación:
   $\log_{(\text{senx} - \cos x)}(\cos 2x - \text{sen}2x + 7\cos x + 5) = 2$

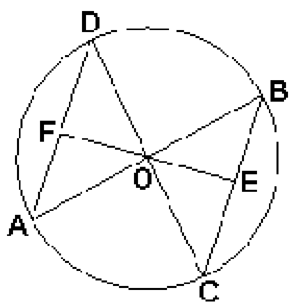
4. En un taller de piezas de repuesto había en total 120 piezas de dos tipos. Una empresa adquirió la mitad de las piezas del tipo I y tres cuartos de las piezas del tipo II. Si lo que quedó es el 40% de las piezas que había inicialmente, calcula cuántas piezas de cada tipo había al principio.



5. La pirámide ABCDE es de base cuadrada de lado a y altura h. P y Q son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente, se conoce que <EPQ = 68,2° y que el triángulo PQE tiene un área de 90,0 cm^2
   Calcule el volumen de la pirámide.
   Datos:
   $\sqrt{2} = 1{,}41$ $\sqrt{3} = 1{,}73$ $\sqrt{5} = 2{,}24$
   sen 68,2° = 0,928 ; cos 68,2° = 0,371 ; tan 68, 2° = 2,50

1996 – 1997 (Primera Convocatoria)

1. Si la función definida por $f(x) = \frac{1}{2}x + 5$ Halle los valores de x para los cuales se cumple: $f(x) = \sqrt{2\,f(x) - 1}$

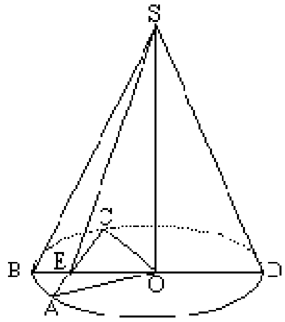


2. A, B. C y D puntos de la circunferencia de centro O y radio r = 4, 0 cm.
   AD || CB y $EF \perp AD$
   a) Demuestre que $\Delta BEO = \Delta DFO$
   b) Calcule el área del ΔDFO si $\overline{AD} = 6{,}4$ cm .

3. Resuelve la siguiente inecuación:
   $log_3\left[5^{(x-3)^2}\right] \geq log_3\, 5^{2x-7} + log_3\, 5^{x+2}$

4. Un número de cuatro cifras es mayor que 1000 pero menor que 2000. La cifra de las unidades es igual a la cifra de las decenas disminuida en 2. La cifra de las centenas es igual a la cifra de las unidades aumentada en 2. La suma de la cifra de las decenas y la cifra de las centenas es igual a la cifra de las unidades aumentada en 11. ¿Cuál es el número?

5. Sean A, B. C y D puntos de la circunferencia de la base del cono de altura S. La oblicua SE forma con su proyección OE sobre el plano de la base del cono el $\angle$ SEO = 45^0. La cuerda AC es perpendicular al diámetro BD en el punto E. $\overline{AC} = 4{,}0$ cm y $\angle$ AOC = 60^0
   Halla el volumen del cono.
   Datos:
   $\sqrt{2} = 1{,}14 \quad \sqrt{3} = 1{,}73 \quad \sqrt{5} = 2{,}24 \quad \sqrt{5{,}76} = 2{,}4 \quad \pi = 3{,}14$



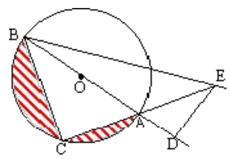
1996 – 1997 (Segunda Convocatoria

1. Sean: $f(x) = 3 - \frac{1}{2} sen 2x \tan x$ y $g(x) = 1 + sen\, x$

a)Calcula $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

b)Halla los valores de **x** para los cuales se cumple que $f(x) = g(x)$

2. En la figura A, B y C son puntos de la circunferencia de centro O y radio r = 1, 0 cm A punto de intersección de las rectas CE y BD. O punto de $\overline{BD}$.
   ED $\perp$ BD
   ΔABE es isósceles de base $\overline{BE}$.



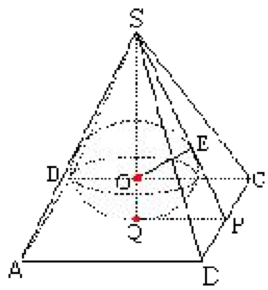
a)Demuestra que ΔABC = ΔADE.

b)Calcula el área sombreada sabiendo que $\overline{DE}$ = 1, 6 cm.

3. Se tienen dos planchas una de zinc y otra de aluminio, de igual área y se recorta un cuadrado en cada plancha de manera tal que sobran 4 m^2 en la plancha de zinc y 11m^2 en la de aluminio. Si la longitud del lado del cuadrado recortado en la plancha de aluminio es igual al 75% de la longitud del lado del cuadrado que se recortó en la plancha de zinc ¿Cuál es el área de cada cuadrado recortado?

4. Halle los valores de a para los cuales x = 18 es solución de la ecuación:
   $\sqrt{\sqrt{ax} - a} = 2$

5. Sea SABCD un pirámide de base cuadrada, la altura $\overline{SP}$ de la cara lateral SDC forma con su proyección $\overline{QP}$ sobre el plano de la base y el $\angle SPQ = 60^0$. En la pirámide está inscrita una esfera de centro O y volumen $V_{esfera} = \dfrac{32\,\pi}{3}\,cm^3$ .Se traza $\overline{OE}$ perpendicular a la cara SDC de tal manera que el punto E pertenece a la altura $\overline{SP}$ de esta cara. La altura $\overline{SQ}$ de la pirámide forma con $\overline{OE}$ el $\angle SOE = 60^0$. Halle el volumen de la pirámide.



1996 – 1997 (Curso para trabajadores)

1. Si $f(x)= x-2+\dfrac{1}{x}$ y $g(x)= x-2+\dfrac{2x-1}{x}$, calcula y simplifica $q(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

2. Dadas $f(x)=3x^2-kx+3$, $g(x)=2x-4$ y $h(x)=1-x$
   a) Calcula los valores de k para los cuales la función f tiene dos ceros diferentes.
   b) Calcula los ceros de f para $k = 7$. ($\sqrt{13} \approx 3{,}6$)
   c) Representa gráficamente la función g en un sistema de coordenadas.
   d) Determina los valores de x que satisfacen la inecuación $g(x) < h(x)$.

3. Una CPA con cierta cantidad de dinero puede comprar 6 sacos de fertilizantes y 15 de semillas, o 12 sacos de fertilizantes y 1º de semillas. Si los sacos de semillas valen $10,00 más que los de fertilizantes:
   a) ¿qué precio tienen los sacos de semilla y cuál los de fertilizantes?
   b) ¿de qué dinero dispone la CPA?

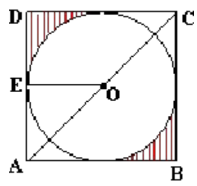
4. Resuelve: $\sqrt{x+1}+\dfrac{13}{\sqrt{x+1}}=6$ $(x>-1)$

5. Calcula el valor de α si $0^0 \le \alpha \le 360^0$ y $\tan\alpha=\dfrac{sen330^0\cdot \tan120^0}{\cos240^0\,\cot(-30^0)}\cdot \tan390^0$

1997 – 1998 (Primera Convocatoria)

1. Halla la abscisa x (0 < x < π/2) del punto donde se cortan los gráficos de las funciones dadas por las ecuaciones: $f(x)=\sqrt{10+\dfrac{9}{2}\cos x}$ y $g(x)= 3+\cos x$.

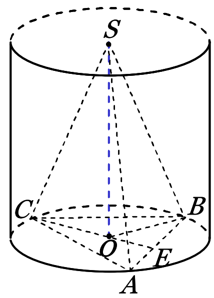
2. La circunferencia de centro O y radio $\overline{OE} = 4{,}0\ cm$ se ha inscrito en el cuadrado ABCD de modo que $\overline{AD}$ es tangente a la circunferencia en E.
   a) Demuestre que ΔABC y ΔAEO son semejantes.
   b) Calcula el área de la parte sombreada.



3. En cierto país, el precio que hay que pagar por enviar un telegrama se calcula de la siguiente manera: Si el telegrama tiene 10 palabras o menos se paga un precio fijo. Si tiene más de 10 palabras, entonces se paga el precio fijo (por las primeras diez palabras) más una cierta cantidad extra por cada palabra adicional.
   Un telegrama de 15 palabras cuesta 11, 65 pesos y un telegrama de 19 palabras cuesta 14, 57 pesos. ¿Cuál es el precio fijo y cuál es la cantidad extra por cada palabra adicional?

4. Sea la función definida por $f(x) = \log\left(3^{2x} - A3^{x} + 10\right)$
   a) Halla el valor de A para el cual se cumple f(1) = 0.
   b) Considerando que A = 10, halla todos los valores de x que satisfacen la ecuación f(x) = 0.

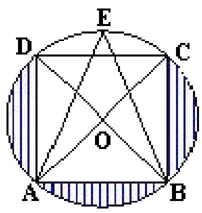
5. En la figura el triángulo equilátero ABC está inscrito en una de las bases del cilindro circular recto. Los puntos O y S son los centros de las bases del cilindro.
   E es punto medio de $\overline{AB}$, $\overline{EB} = 3{,}0\ cm$ y
   $\angle OSB = 79{,}1°$.
   Calcula el volumen del cilindro.



1997 – 1998 (Segunda Convocatoria)

1. Resuelve la ecuación: $\sqrt{\sqrt{12x} + x} = 3$

2. En la circunferencia de centro O y diámetro $\overline{AC} = 4{,}0\ cm$. B y D son puntos de la circunferencia
   $AC \perp BD$ y E punto medio de $\overline{DC}$.
   a) Pruebe que: ΔADE y ΔBCE son iguales.
   b) Halla el área de la parte sombreada.

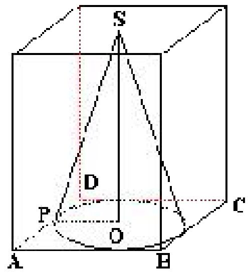


3. En un centro escolar hay dos terrenos de forma cuadrada para desarrollar las actividades de Educación Física, la suma de sus áreas es igual a 41 unidades cuadradas y la mitad del perímetro del terreno más grande excede en 6 unidades al

lado del otro terreno. ¿Qué longitud total de cerca metálica se necesita para cercar los terrenos?

4. Sea A un número real dado. Considera la ecuación:
   cos x + cos 2x +A = 0
   a) Resuelve la ecuación para A = – 2.
   b) ¿Para qué valores de A una de las soluciones de la ecuación es $x = \frac{3\pi}{2}$?

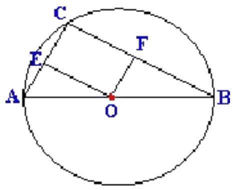
5. La base de un cono circular recto está inscrita en la base cuadrada ABCD de un prisma recto, como se muestra en la figura. Los puntos S y O son los centros de los bases del prisma, S es el vértice del cono y P es el punto en el cual AD es tangente a la circunferencia de la base del cono.
   La diagonal $\overline{BD}$ mide 6, 0 cm, $\angle SPO = 75{,}3°$.
   Calcula el volumen del cono.



1998 – 1999 (Primera Convocatoria)

1. Dadas las expresiones: $A = \sqrt{36 - x^2}$ y $B = \sqrt{x^2 - 3x - 28}$ .Determina para qué valores de x están definidas simultáneamente ambas expresiones.

2. El triángulo ABC está inscrito en la circunferencia de centro O y diámetro AB=8, 0 cm. $\overline{EO} // \overline{BC}$, $\overline{OF} // \overline{AC}$ y $\overline{AC} = \overline{AO}$.

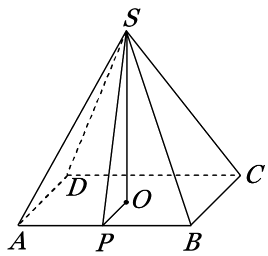


   a) Calcula la razón $\dfrac{\text{Área del rectángulo EOFC}}{\text{Área del círculo de centro O y diámetro } \overline{AB}}$
   b) Determine la amplitud del ángulo ABC.

3. Dos grupos de estudiantes de un IPUEC están recogiendo papas. Al inicio de la jornada se le entregó a cada uno cierta cantidad de sacos vacíos. La tercera parte de los sacos entregados al grupo B excede en 4 a la cuarta parte de los entregados al grupo A. Al terminar la sesión de campo, entre los dos grupos lograron llenar todos los sacos pero el grupo A, llenó 30 sacos menos que los que le habían sido entregados y la cantidad de sacos que logró llenar el grupo B excede en dos al duplo de los que llenó el grupo A. ¿Cuántos sacos vacíos se entregaron al inicio de la jornada a cada grupo?

4. Sea $f(x)=\dfrac{1+\operatorname{sen} Ax}{\cos Ax}$ y $g(x)=\dfrac{A-1+\tan x}{A-1-\tan x}$

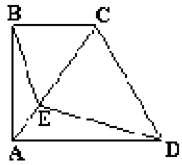
a) Demuestre que si A = 2, la igualdad f(x) = g(x) es una identidad para todos los valores admisibles de la variable x.
b) Considera A = 1 y resuelve la ecuación f(x) = -1.



5. En la figura ABCDS es una pirámide recta de base cuadrada de 4,0 cm de lado. El punto O es la proyección de S sobre la base, $\angle SAP = 60^\circ$ y P punto medio de $\overline{AB}$.
Calcula el volumen de la pirámide.

1998 – 1999 (Segunda Convocatoria)

1. Resuelve la inecuación $\dfrac{x}{x-5}-\dfrac{1}{x-4}\leq\dfrac{x}{x^2-9x+20}$.

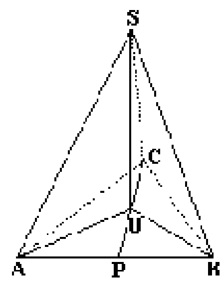


2. En la figura A, E y C están alineados $\angle BAD = 90^\circ$, $\angle BCA = 80^\circ$, $\angle CDE = \angle BAC = 40^\circ$, $\angle EDA = 10^\circ$.
a) Demuestra que los triángulos ABC y DEC son iguales.
b) Calcula la amplitud del ángulo ABE.

3. En un centro deportivo hay 400 atletas varones más que hembras. Se decidió trasladar para otro centro al 70% de los varones y al 20% de las hembras, quedando en el centro inicial 100 hembras más que varones. ¿Cuántos atletas de cada sexo se quedaron en el centro deportivo?

4. Dada la igualdad $\dfrac{A^2+\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x}=A\cot x$
a) Demuestre que para A = 1 la igualdad que se obtiene es una identidad para todos los valores admisibles de la variable x.
b) En la igualdad toda considera A = ½ y resuelve la ecuación obtenida.

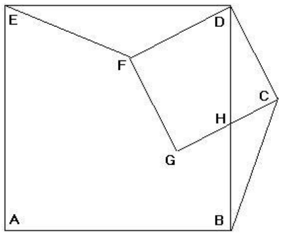
5. Sea ABCS una pirámide regular cuya base es un triángulo equilátero ABC. El punto O es la proyección de S sobre la base. $\overline{OP}$ es perpendicular a $\overline{AB}$. Las aristas laterales miden 5, 0 cm y sus proyecciones respectivas miden 4, 0 cm. Calcule el volumen de la pirámide.



1999 – 2000 (Primera Convocatoria)

1. Determina los valores reales de x que satisfacen la ecuación:

$$3^{(-2x^2)}.9^{(-2x^2-3)} = \left(\frac{1}{27}\right)^{6x-2}$$



2. En la figura
- ABDE y CDFG son cuadrados
- <FDB=60°
- H es la intersección de $\overline{BD}$ y $\overline{CG}$

a) Calcula la amplitud del ángulo BHC
b) Prueba que $\Delta EFD = \Delta BCD$

3. Sean las funciones f y g : $f(x) = \dfrac{(x-1)\sqrt{x+3}+2x+1}{x+2}$ g(x)=x

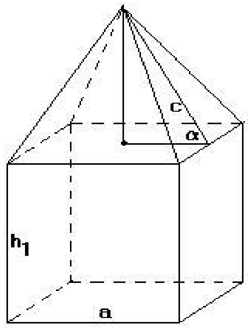
a) Halla el dominio de la función f.
b) Encuentra los valores reales de x para los cuales se cumple la ecuación f(x)= g(x).

4. Alejandro hizo dos llamadas de larga distancia desde Ciudad de la Habana, una a Santiago de Cuba y la otra a Matanzas. La operadora al final le informa que habló en cada ocasión más de tres minutos y que en total estuvo conversando 15 minutos por lo que debe pagar $7,40. Más tarde, Alejandro consultó la siguiente tabla para saber lo que le cobraron por cada llamada:

Desde Ciudad de la Habana a los siguientes territorios.	Tres minutos	Minuto adicional
Pinar del Río, Isla de la Juventud, Matanzas	1.00	0.25
Las Tunas, Holguín, Granma, Santiago de Cuba, Guantánamo	2.40	0.60

a) ¿Cuántos minutos estuvo hablando Alejandro con cada provincia?
b) ¿Cuánto pagó por cada llamada?

5. En la figura aparecen representados un prisma de base cuadrada de lado (a) y una pirámide recta cuya base coincide con una de las bases del prisma. Se sabe que:



- El área lateral del prisma es A_l=28,8 cm²
- La longitud de la altura del prisma es h_1=0,4 dm.
- La longitud de la altura de cada cara de la pirámide es c=2,6 cm
- La amplitud del ángulo formado por esa altura (c) y su proyección sobre la base de la pirámide es α=69,8°.

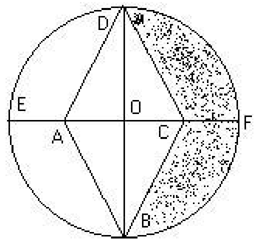
a) Calcula el volumen de la pirámide ($V_{pirámide}$)
b) ¿En que proporción deberán estar h_1 y h_2 (altura de la pirámide) para que $\dfrac{V_{pirámide}}{V_{prisma}} = \dfrac{2}{3}$?

2000– 2001 (Primera Convocatoria)

1. Dadas las funciones f y g definidas por $f(x)=\sqrt{6-4x}$ y $g(x)=\sqrt{x^3-3x^2+x+3}$

a) Halla el dominio de la función f.
b) Determina los valores reales de x tales que f(x) – g(x) = 0

2. En la figura:



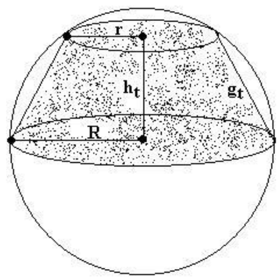
- El rombo ABCD tiene sus vértices D y B sobre la circunferencia de centro O y diámetro $\overline{EF}$
- A y C son puntos de $\overline{EF}$
- O es un punto de $\overline{BD}$
- $\overline{BD}$ =32cm y $\overline{AC}$ =24cm

a) Calcula el perímetro del rombo ABCD.
b) Calcula el área de la región sombreada.

3. Determine el con junto solución de la ecuación $\dfrac{sen2x-2senx}{sen^2x+(senx+\cos x)^2}=1$

4. Una empresa de la industria electrónica produce teclados y pantallas para calculadoras gráficas en dos plantas: en la A y en la B. En la planta A se fabrican 14 teclados y 9 pantallas por hora y en cada jornada de 8 horas se desechan como promedio 2 teclados y 2 pantallas. En la planta B, de más moderna tecnología, se producen 55 teclados y 55 pantallas por hora. ¿Cuántas jornadas de 8 horas debe trabajar cada planta para que conjuntamente produzcan 1210 teclados y 1090 pantallas?

5. En el interior de una esfera de radio R=1,6 cm está situado un cono truncado resultante de haber realizado un corte transversal paralelo a su base de radio precisamente R; mientras que el radio de la circunferencia resultante del corte es r=9,2mm. La distancia que separa a esta de la base del cono es h_t =0, 6cm.



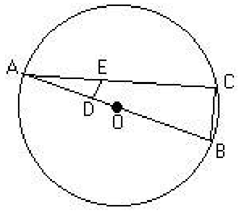
a) Halla la altura (h) del cono original.
b) Calcula el volumen del cono truncado (V_t) sombreado en la figura. (π=3.14)

2001 – 2002 (Primera Convocatoria)

1. Sean f y g dos funciones reales dadas por las ecuaciones $f(t)=\sqrt{t-2}+10^{\log(t+3)}$ y $g(t)=\sqrt{(t-1)^2-21}+t+3$

c) Halla el dominio de la función f.
d) Determina para qué valores de t se cumple que f(t) = g(t)

2. En la figura:
A, B, C son puntos de la circunferencia con centro en O y diámetro, E y D son puntos de $\overline{AC}$ y $\overline{AO}$ respectivamente y $\overline{ED} \perp \overline{AO}$. El área del círculo de centro en O y diámetro $\overline{AB}$ es igual a 16π cm².



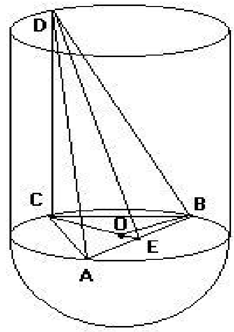
a) Prueba que $\overline{AC}.\overline{ED} = \overline{CB}.\overline{AD}$

b) Si <CAB = 30° y el área de ΔADE= $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ cm². Determine el área del cuadrilátero EDBC

3. Determine el con junto solución de la ecuación $2sen^2x+\cos 2x+\frac{2}{\cos x} = \cos x$

4. En una UBPC se plantaron 2 caballerías más de papas que de boniatos. Después de una semana de trabajo en la recolección, los trabajadores de la UBPC verificaron que aun quedaba por recoger el 21% de la plantación de papas y el 75% de la de boniatos, lo que implicaba que faltaba por recoger 3,9 caballerías más de boniatos que de papas. ¿Cuántas caballerías de cada cultivo se habían plantado?

5. En la figura se muestra un cuerpo formado por un cilindro circular recto de altura $\overline{CD}$ cuya base inferior tiene centro en O y radio r= $\overline{OB}$, y una semiesfera con centro en O y de radio igual al del cilindro. El ΔABC es equilátero de perímetro $9\sqrt{3}$ m e inscrito en la base inferior del cilindro. $\overline{CE}$ es la mediana del ΔABC relativa al lado $\overline{AB}$ y proyección de la oblicua $\overline{DE}$.



a) ¿Cuál es la amplitud de ∠DEB? Justifica.

b) Determina la altura del cilindro si el volumen del cuerpo es 63π m³.

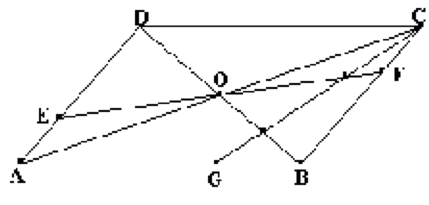
2001 – 2002 (Segunda Convocatoria)

1. Sea la función real definida para todos los valores reales de t por la ecuación: $f(t) = 2^t$.

a) Verifica que se cumple: $\frac{f(log_2 50)}{log_2 160 - log_2 5} = \frac{5}{(\sqrt{2})^{-2}}$

b) Determina para qué valores de t se cumple: $2\,f(\sqrt{3}t-2) = 2^{2t}$

2. En la figura:
ABCD es un paralelogramo y O el punto de intersección de sus diagonales, E y F puntos situados sobre los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, distintos de sus extremos, E, O y F puntos alineados.



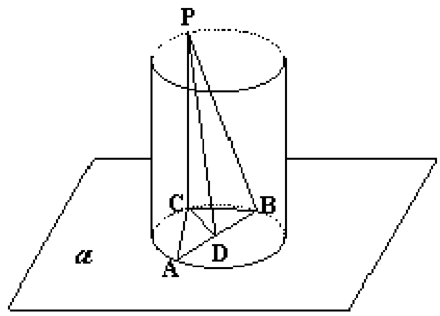
a) Demuestra que $\overline{OE} = \overline{OF}$.

b) Si G es el punto del segmento AB, tal que $\overline{BG} = \frac{1}{2}\overline{AG}$, prueba que el área del triángulo BCG es igual a 1/6 del área del paralelogramo ABCD.

3. Halla el conjunto solución de la ecuación: cos 2x - cos x tan x = 0

4. Entre dos Institutos Preuniversitarios en el Campo había a principios de curso 62 alumnos de duodécimo grado que manifestaron interés por estudiar carreras pedagógicas. A mediados de curso, el número de interesados en el IPUEC 1 se incrementó en un 20%, y en el IPUEC 2, en un 25%, de modo que entre ambos centros hay ahora 76 alumnos que desean estudiar una carrera pedagógica. ¿Cuántos alumnos de grado 12 aspiran en estos momentos a una carrera pedagógica en cada escuela?

5. En un plano α, sea ABC un triángulo isósceles de base $\overline{AB}$. Por C se traza el segmento CP, perpendicular al plano α.. Además, sea CD bisectriz del ángulo ACB y $\overline{DP}$ una oblicua al plano α, cuya proyección sobre α coincide con $\overline{CD}$.



a) ¿Cuál es la amplitud del ángulo PDB? Justifica tu respuesta.

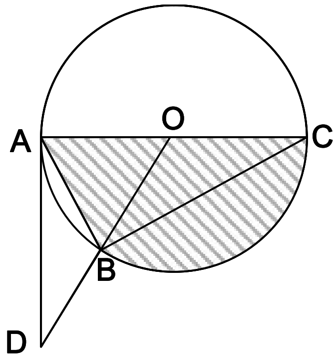
b) Halla el área total en cm² del cilindro circular recto de altura $\overline{CP}$, que tiene al triángulo ABC inscrito en su base inferior, sabiendo que: π= 3,14, $\angle$ACB = 90°, $\angle CPD = 21{,}8^{o}$ y que el área de la base inferior de dicho cilindro es de 640 mm². Justifica cada uno de los pasos, siempre que sea posible.

Datos: sen 21,8°=0,371; cos 21,8°= 0,929; tan 21,8°= 0,400

2002 – 2003 (Primera Convocatoria)

1. Resuelve la ecuación: $\frac{1}{3} \cdot 27^{senx} = 3^{cos2x}$

2. En la figura, los puntos A, B y C pertenecen a la circunferencia de centro O y diámetro $\overline{AC} = 5{,}0\,\text{cm}$. Se tiene además que $\angle$AOB = 60^0, $\overline{AD}$ es tangente a la circunferencia en A y los puntos O, B y D están alineados.



   a) Prueba que ΔABC = ΔAOD.
   b) Halla el perímetro de la región rayada.

3. En un grupo de duodécimo grado todos sus alumnos eligieron en la primera opción una carrera de los grupos de humanidades, ciencias técnicas o ciencias naturales, comportándose las cifras de este modo:

   El 20% de la matrícula optó por carreras de humanidades, las $\frac{3}{4}$ partes del resto de los alumnos prefirieron carreras técnicas, mientras que 8 alumnos optaron por ciencias naturales.

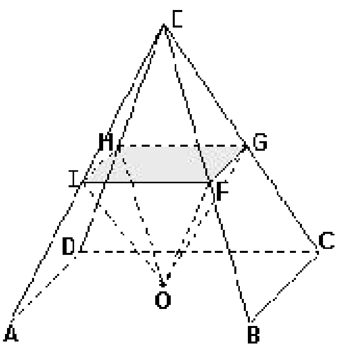
   a) Halla la matrícula del grupo.
   b) ¿Cuántos alumnos optaron por las carreras técnicas en la primera opción?

4. Dadas la funciones $f(x) = \log_2(x-3)$ y $g(x) = \log_{0,5}\frac{x}{4}$

   a) Calcula $f(32\sqrt{2}+3)$.
   b) Halla los valores de x para los cuales las imágenes de la función f son menores o iguales que las imágenes de la función g.

5. Se tienen dos pirámides de base cuadrada, una inscrita dentro de la otra, como se muestra en la figura. Si la diferencia de las áreas de las bases de las pirámides es de 12 cm^2 y las aristas de la base de la pirámide ABCDE mide 4,0 cm.

   a) Calcula el volumen de la pirámide FGHIO si su altura es de $\sqrt{3}$ cm.
   b) Halla el área lateral de la pirámide ABCDE si el ángulo de inclinación de una de las caras laterales y la base es de 60^0.



2002 – 2003 (Seguda Convocatoria)

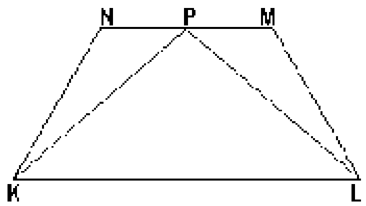
1. Sean las expresiones $A = \dfrac{m^3+4m^2-5m}{m^3+125}$ y $B = \dfrac{3-3m^2}{m^3-4m^2+20m+25}$

   a) Prueba que para todos los valores admisibles de la variable se cumple que $\dfrac{A}{B} = -\dfrac{m}{3}$
   .
   b) Halla todos los valores reales de la variable m para los cuales se cumple que:
   $\dfrac{A}{B} \geq m^2 + \dfrac{4}{3}m - \dfrac{2}{3}$

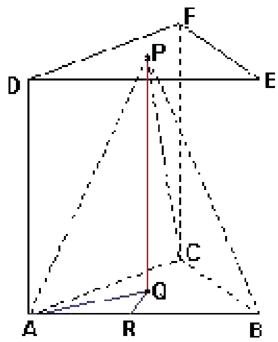
2. En el pasado campeonato nacional de pelota en nuestro país, después que cada equipo había celebrado la misma cantidad de juegos, los jugadores A y B habían conectado la mayor cantidad de jonrones, en ese orden. El triplo de los jonrones conectados por B era superior en 16 al duplo de los conectados por A. Si el cuadrado

de los jonrones conectados por B lo dividimos por los conectados por A, el cociente es 20 y el resto es 16. ¿Cuántos jonrones conectó cada jugador?

3. En la figura, KLMN es un trapecio de bases $\overline{KL}$ y $\overline{MN}$. El triángulo KLP es isósceles de base $\overline{KL}$ y P es el punto medio $\overline{MN}$.
   a) Prueba que el trapecio KLMN es isósceles.
   b) Si $\angle KLP = 80^0$ y $\angle NKP = 25^0$, calcula la amplitud del $\angle LMP$.

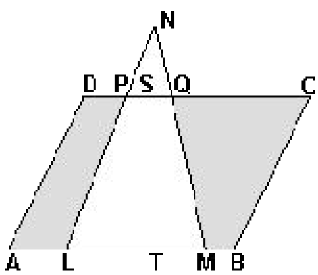


4. Se dan las funciones $f(x) = \dfrac{\cos 2x}{\tan^2 x + 1} + \cos^2 x$ y $g(x) = 2\cos^4 x$.
   a) Prueba que f(x) = g(x) para todos los valores admisibles de la variable.
   b) Resuelve la ecuación $g(x) = \operatorname{sen}^2 x$
5. Se tiene un prisma recto de altura $\overline{PQ} = 20\,\text{cm}$, cuya base es un triángulo equilátero ABC. En su interior está inscrito una pirámide recta ABCP, como se muestra en la figura. La proyección de $\overline{AP}$ sobre el plano de la base es $\overline{AQ}$, $\angle APQ = 30^o$ y $\overline{QR} \perp \overline{AB}$.
   a) Calcula el área total del prisma.
   b) calcula el volumen de la pirámide.



2003 – 2004 (Primera Convocatoria)

1. Sean las expresiones $C = 2a^3 + 5a^2 - 14a - 8$ y $D = 5a^3 + 10a^2 - 40a$, siendo a un numero real.
   Si $E = \dfrac{C}{D}$, halla los valores reales de a para los cuales se cumple que $E \geq 0$.
2. En la figura, ABCD es un rombo cuyo perímetro es 72 cm. L y M son puntos sobre $\overline{LM} = 12\,\text{cm}$. N es un punto exterior al rombo, tal que $\overline{LN}$ y $\overline{MN}$ cortan a $\overline{CD}$ en P y Q respectivamente. $\overline{LN} = 5\overline{NP}$ y T es un punto sobre $\overline{AB}$ tal que $\overline{NT} = 25\,\text{cm}$ y $\overline{NT} \perp \overline{AB}$. S es el punto donde se cortan $\overline{NT}$ y $\overline{CD}$.
   a) Demuestra que $\Delta LMN \sim \Delta PQN$.
   b) Halla el área de la región sombreada.



__Nota__: La pregunta original tiene un error, para subsanarlo se puede modificar asumiendo $\overline{NT} = 20\ cm$ *en lugar de* $\overline{NT} = 25\ cm$. *De esta forma la respuesta del inciso b) es* $A_{sombreada} = 162\ cm^2$.

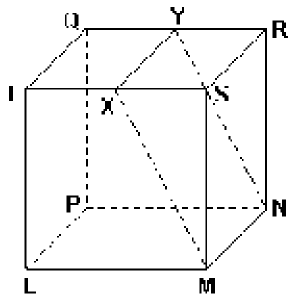
3. Dos camiones distribuyeron cierta cantidad de materiales, de modo que cada uno transportó la mitad. El primer camión realizó 17 viajes, transportando siempre el máximo de su capacidad, excepto en el último viaje que solo utilizó el 50% de su capacidad. El segundo camión dio un viaje más y en cada viaje transportó una tonelada menos que la capacidad máxima del primer camión. ¿Cuántas toneladas de materiales transportaron entre los dos camiones?

4. Se dan las funciones $f(x)=\dfrac{cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}{tan(2\pi-x)}$ y $g(x)=2senx\,cos\,x$

   a) Prueba que para todos los valores admisibles de la variable se cumple que $f(x)=-cos\,x$.

   b) Resuelve la ecuación $2[g(x)]^2+3g(x)=2$.

5. En la figura, LMNPQRST es un cubo, X e Y son los puntos medios de $\overline{ST}$ y $\overline{QR}$ respectivamente. Si el área total del cuerpo MNRSXY es $(200+50\sqrt{5})\,dm^2$. Calcula el volumen del cubo.



2004 – 2005 (Primera Convocatoria)

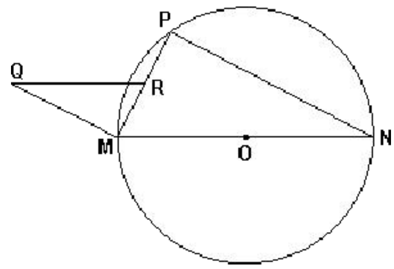
1. Sean las funciones reales f y g dadas por las ecuaciones: $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+3x-15}{x+5}+3}$ y $g(x)=log_3(x-\sqrt{x-1})$

   a) determina el dominio de f.

   b) Halla los valores de x para los cuales se cumple que g(x) = 1.

2. En la figura:

   - M, N y P son puntos de la circunferencia de centro O y diámetro $\overline{MN}$,
   - $\overline{QM}\perp\overline{MP}$,
   - $\overline{QR}//\overline{MN}$ y
   - $R\in\overline{MP}$.



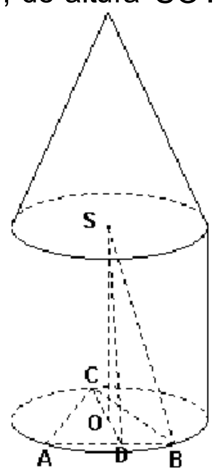
   a) Demuestra que: $\overline{NP}\cdot\overline{MR}=\overline{QM}\cdot\overline{MP}$.

   b) Si se conoce que: $\overline{ON}=5{,}0\,cm$, $\overline{PN}=8{,}0\,cm$ y la razón de semejanza entre los lados homólogos de los triángulos MNP y QMR es igual a 2, calcula el perímetro del pentágono MNPRQ.

3. Dadas las expresiones trigonométricas, $A = \dfrac{\cot x\, \operatorname{sen} x + \cos 2x}{2\cos x + 1}$ y $B = 2\cos x - 1$
   a) Determina para qué valores de la variable no está definida la expresión A.
   b) Prueba que para todos los valores admisibles de la variable, se cumple que $A = B$.

4. En una cooperativa de producción agropecuaria se sembraron 40,5 hectáreas más de ajos que de cebolla. Al terminar la recolección de las $\frac{3}{5}$ partes de las hectáreas de ajo y el 30% de las hectáreas de cebolla se concluyó que se había recolectado un total de 97,2 hectáreas ¿Cuántas hectáreas de ajo y de cebollas fueron sembrada en la cooperativa?

5. En la figura se muestra un cuerpo formado por un cilindro circular recto, de altura $\overline{SO}$. Sobre su base superior se ha superpuesto un cono cuya base coincide con la del cilindro. En la circunferencia de la base inferior con centro en O y radio $\overline{OC}$ está inscrito un triángulo equilátero ABC de lado $4\sqrt{3}$ cm. Además se conoce que:

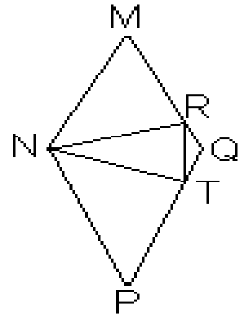


- $\overline{CD}$ es la mediana relativa al lado $\overline{AB}$
- $\overline{SD}$ oblicua al plano ABC y $\overline{OD}$ es su proyección.
- El ángulo que forma la oblicua con su proyección es de $71{,}6^0$.

a) Clasifica el ΔSDB según la amplitud de sus ángulos. Justifica tu respuesta.
b) Calcula el volumen del cono si se conoce que: $\dfrac{h_{cilindro}}{h_{cono}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
c) Halla la distancia del punto C al plano ABS.

2004 – 2005 (Segunda Convocatoria. ETP)

1. Resuelve la siguiente ecuación: $\left(9^{\operatorname{sen}2x}\right)^{\cot x} : 3^{\cos 2x} = 3^{\cos x + 2}$
2. En la figura:



- MNPQ es un rombo, R y T pertenece a $\overline{MQ}$ y $\overline{QP}$ respectivamente.
- $\angle MNT = \angle RNP$
   a) Prueba que el ΔRNT es isósceles de base $\overline{RT}$.
   b) Si el área del triángulo MNR es igual a 10,5 cm^2, la altura h, relativa al lado $\overline{NR}$ es 35mm y la razón entre las longitudes de los lados $\overline{NR}$ y $\overline{RT}$ es igual a 3, calcula el perímetro del triángulo RNT.

3. Sea f una función real definida por la ecuación: $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{-x+7}+2^{log_2\left(\frac{1}{5}x+1\right)}$

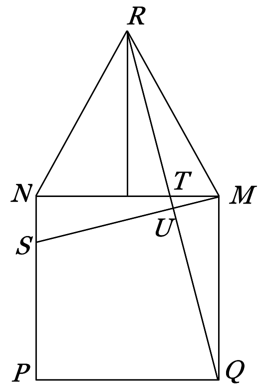
   a) Determina el dominio de la función *f*.

   b) ¿Será posible calcular *f*(1)?. Justifica tu respuesta.

   c) Calcula f(a) si $a=\dfrac{1}{2}log_3 100+log_3 24{,}3$

4. En febrero una casa de vivienda consumió en el mes, durante el período nocturno el doble de la electricidad que consumió durante el período diurno. Medidas internas aplicadas en ese núcleo familiar hicieron que en marzo, durante el período nocturno, el consumo eléctrico del mes disminuyera en un 25% y durante el período diurno se ahorra un 20%, lo que hizo que el consumo eléctrico de la vivienda este mes fuese de 184Kwh ¿En qué tanto por ciento disminuyó el consumo de energía de un mes a otro, una vez aplicadas las medidas?

2005 – 2006 (Primera Convocatoria)



1. Resuelve la siguiente ecuación, para $0 \le x \le 2\pi$:
   $log\left(cos^2 x+sen\, x\right)-log\, cos 2x=log_3 1$
2. En la figura:
   - MNPQ es un cuadrado,
   - T y S puntos de $\overline{MN}$ y $\overline{NP}$ respectivamente,
   - MNR triángulo equilátero,
   - $\overline{RQ}$ y $\overline{MS}$ se cortan en *U* y
   - $\angle SMQ=\angle PQT$

   a) Prueba que $\overline{NS}=\overline{MT}$.
   b) Halla la amplitud del ángulo MRQ.
   c) Si el perímetro del cuadrado PQMN es 32 cm, halla el área del triángulo MRQ.

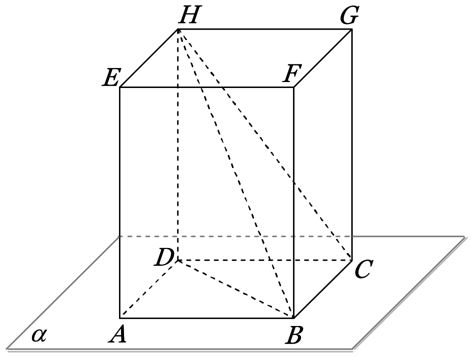
3. En un Instituto Preuniversitario en el Campo participaron en el curso anterior todos sus alumnos en la Brigadas Estudiantiles de Trabajo. Si la cantidad de hembras participantes excedió en 70 al 40% de la cantidad de varones, y la razón entre la cantidad de hembras y varones es 3 : 4. ¿En cuánto supera la cantidad de varones a la cantidad de hembras?
4. Sean las funciones reales *f*, *g* y *h*, definidas por las ecuaciones:

   $f(x)=3^{2+\sqrt{x+5}}$, $g(x)=4^{3x}$ y $h(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2+5}$

   a) Determina el dominio y la imagen de la función *f*.
   b) Calcula los valores reales para los cuales se cumple que $g(x)\ge h(x)$.
   c) Halla las coordenadas del punto en que el gráfico de la función h corta al eje "y".

d) Analiza si el par $\left(log_2\sqrt{2}\ ;\ 8\,tan\frac{5\pi}{4}\right)$ pertenece a la función g.

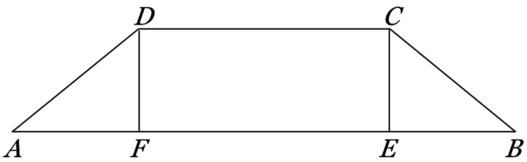
5. En la figura se muestra un prisma recto ABCDEFGH, situado en el plano α. La base del prisma es el cuadrado ABCD y la diagonal $\overline{HB}$ del prisma, forma con el plano que contiene la base, un ángulo de 45^{o}.
   a) Prueba que el triángulo BCH es rectángulo.
   b) Si el volumen del prisma es $125\sqrt{2}\ cm^3$, halla su área total.
   c) Calcula $cos(\angle DBH + \angle BHC)$.



2006 – 2007 (Primera Convocatoria)

1. Se tiene la expresión $A(x)=\frac{x-4}{x+5}$.
   a) Resuelve la ecuación $4^{A(x)}=16^{x}$ (x ∈ R).
   b) Determina para quévalores reales de la variable x se cumple que $A(x)\geq x$.

2. En la figura aparece ABCD que es un trapecio isósceles de bases $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, $\overline{BC}=13\ cm$, $\overline{AB}=4{,}0\ dm$. E y F son puntos de $\overline{AB}$ con $\overline{CE}\perp\overline{AB}$ y $\overline{CE}\,//\,\overline{DF}$. La altura de $ABCD$ es $5{,}0\ cm$.
   a) Prueba que los triángulos CEB y AFD son iguales.
   b) Halla el área del trapecio $BCDF$.

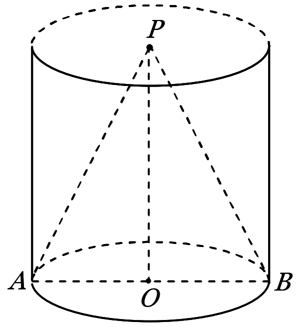


3. Sean p y q dos funciones reales con $p(\alpha)=cos2a+sen\,\alpha+cot\,\alpha$ y $q(\alpha)=cot\,\alpha+1$.
   a) Determina el dominio de la función q.
   b) Halla, si existen, las coordenadas de los puntos donde se cortan los gráficos de las funciones p y q en el intervalo $0\leq\alpha\leq 2\pi$.

4. En los Concursos Nacionales de Matemática, Física, Química e Informática las provincias que obtuvieron los tres primeros lugares, en ese orden, fueron Ciudad de la Habana con 105 puntos, Las Tunas con 74 puntos y Villa Clara con 65 puntos. En Matemática y Física la provincia ganadora resultó ser Ciudad de la Habana con 34 puntos en cada una de estas asignaturas; en matemática, Villa Clara logró 15 puntos y Las Tunas 5, pero en Física Las Tunas alcanzó 32 puntos y Villa Clara , 3 puntos. En Informática la provincia ganadora fue Villa Clara con 4 puntos más que Las Tunas y

esta 4 puntos más que Ciudad de la Habana. Si el total de puntos de estas tres provincias en Informática fue de 57 puntos, determina cuántos puntos obtuvo cada una de estas tres provincias en Informática y Química

5. En la figura se tiene un cilindro circular recto donde O y P representan los centros de los círculos bases. $\overline{AB}$ es un diámetro de la circunferencia de centro en O, $\overline{BP} = 15\,cm$ y $sen\angle OPB = \frac{3}{5}$.



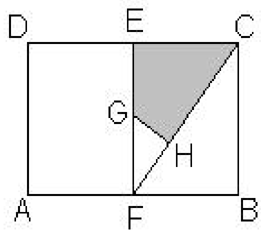
a) Calcula el área total del cilindro.

b) Si al cilindro se le hace una perforación y se le extrae el cono de diámetro $\overline{AB}$ y altura $\overline{OP}$, halla el volumen resultante.

2006 – 2007 (segunda Convocatoria)

1. Dadas las funciones reales f y g definidas por sus ecuaciones $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$ y g(x) = x + 3.
   a) Determina el dominio de definición de la función f.
   b) ¿El valor $y_0 = -4$, pertenece al conjunto imagen de la función g? Justifica tu respuesta.
   c) Halla, si existen, las coordenadas de los puntos de intersección entre las gráficas de las funciones f y g.

2. En la figura, ABCD rectángulo.
E y F puntos medios de $\overline{CD}$ y $\overline{AB}$ respectivamente.
H y G puntos de $\overline{FC}$ y $\overline{EF}$ respectivamente con $\overline{GH} \perp \overline{FC}$.
$\overline{AB}$ = 6,0 cm; $\overline{BC}$ = 4,0 cm; y $\overline{GH} = \frac{1}{3}\overline{EC}$.



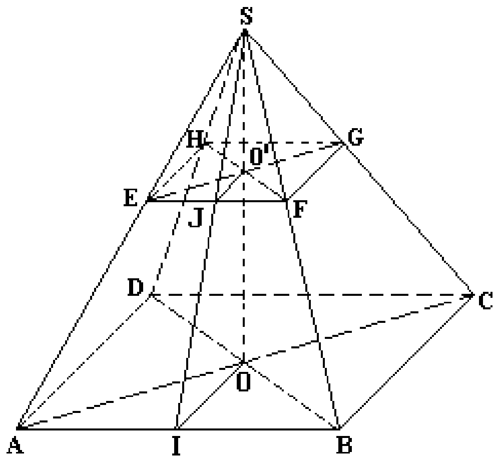
a). Prueba que $\overline{EC} \cdot \overline{HF} = \overline{EF} \cdot \overline{GH}$.
b). Calcula el área de la región sombreada.

3. Halla el conjunto solución de la ecuación:

$$2\cos 2x - 1 = \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^2 x, \quad \text{si} \quad 0 \le x \le \pi \quad (x \in \Re).$$

4. Si el mayor de los lados de un rectángulo fuera 9 cm más corto y el menor fuera 6 cm más largo, entonces la figura sería un cuadrado con igual área que el rectángulo. ¿Cuáles son las longitudes de los lados del rectángulo?

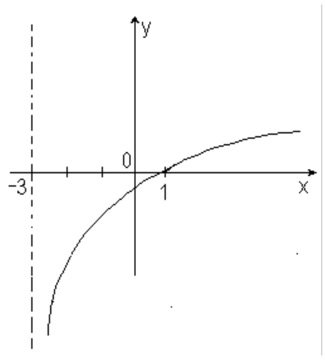
5. La figura muestra una pirámide regular SABCD de base cuadrada y altura $\overline{SO}$, la cual ha sido cortada por el plano EFGH paralelo a su base.
O y O' puntos de intersección de las diagonales de los cuadrados ABCD y EFGH respectivamente.
S, O', O, puntos alineados.
La altura del triángulo ABS referida al lado $\overline{AB}$, es $\overline{SI}=15$ cm. $\overline{SI}$ corta a $\overline{EF}$ en J.
La altura de la pirámide SEFGH es $\overline{SO'}$ = 4,0 cm y $\angle$ JSO' = 36,9^0.



a) Halla el volumen de la pirámide SEFGH.
b) Halla al área total de la pirámide truncada ABCDEFGH.

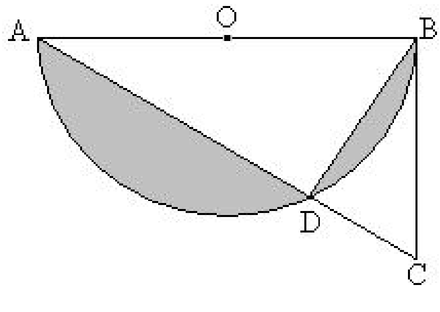
2006 – 2007 (tercera Convocatoria)

1. Sean las funciones reales f y g , definidas por las ecuaciones $f(x)=\log_2(x+b)+c$ (b y c reales) y $g(x)=2^{\frac{1}{x}+1}$



a) De la función f cuyo gráfico se muestra a la derecha determina:
   Dominio:__________________.
   Imagen:__________________.
   Ceros: ____________.
   Los valores de b y c __________.
b) ¿Para qué valores reales de x se cumple que $g(x)\le 1$?

2. En la figura se muestra un semicírculo de centro O y diámetro $\overline{AB}$ en que se ha inscrito el triángulo ADB.
$\overline{BC}$ tangente al semicírculo en el punto B.
A, D y C puntos alineados.
El perímetro del semicírculo es igual a 10, 28 cm y $\angle$ BAC = 30^0.



a) Demuestra que $\Delta ADB \sim \Delta BDC$
b) Halla el área de la región sombreada.

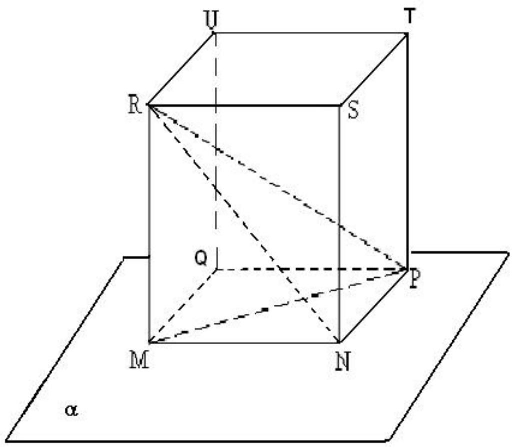
3. Como parte de las medidas de beneficio a la población, en un consejo popular de un municipio, dos brigadas de trabajadores sociales A y B se planificaron visitar entre ambas 330 viviendas. En un momento en que fue controlada la actividad, la brigada A había visitado las dos terceras partes de la cantidad de viviendas que se había propuesto visitar, mientas que la brigada B, había visitado el 80% de las viviendas que se había planificado visitar. Si en ese momento solo faltaban por visitar 86 viviendas, ¿cuántas habían visitado cada brigada, hasta el momento en que fue controlada la actividad?

4. Sean $A=\sqrt{\dfrac{3\text{sen}2x}{2\cos x}+1}$ y $B=\cos(\dfrac{\pi}{2}-x)$

a) Determina los valores reales de x con $0 \le x \le \pi$ para los que se cumple que: A – 1 = B.

b) Calcula el valor numérico de A^2 para $x = -\dfrac{5\pi}{3}$.

5. En la figura se ha representado el prisma recto MNPQRSTU de base cuadrada situada sobre el plano α, donde se han trazado tanto la diagonal interior $\overline{RP}$ como las diagonales $\overline{MP}$ y $\overline{RN}$ sobre dos de sus caras; además en su interior se observa la pirámide oblicua MNPR. Si el área lateral del prisma es 62,28 cm^2 y $\angle RNM = 60^0$.



a) Calcula el volumen de la pirámide MNPR.
b) Clasifica el triángulo RNP atendiendo a las longitudes de sus lados. Justifica tu respuesta.

2007 – 2008 (primera Convocatoria)

1. Lee detenidamente la pregunta y responde:
1.1 Clasifica las siguientes proposiciones en verdaderas o falsas. Escribe (V ó F) en la línea dada. Justifica las que sean falsas.

a) ___La correspondencia definida de R en R donde a cada número real x se le hace corresponder $\dfrac{1}{x}$ es una función.

b) ___La función real f dada por la ecuación f(x) = $\sqrt{x}$ + 3 no tiene ceros.

c) ___La función g definida en los reales cuya ecuación es g(x) =1 – 2x es monótona decreciente en todo su dominio.

d) ___El conjunto imagen de la función h dada por la ecuación $h(x)=2^{3x}-1$ es $\{y \in R\text{: } y \ge -1\}$.

1.2 Selecciona la respuesta correcta marcando con una X en la línea dada.

1.2.1 La expresión $\log\dfrac{3-x}{x}$ está definida para todo

a) ___$\{x \in R\text{: } x \ne 0\}$
b) ___$\{x \in R\text{: } 0 < x \le 3\}$
c) ___$\{x \in R\text{: } 0 < x < 3\}$
d) ___$\{x \in R\text{: } x < 0 \text{ ó } x > 3\}$

1.2.2 Sean las rectas r_1 y r_2 de ecuaciones r_1: $\alpha x - y + 3 = 0$ y r_2: y = – 4x + 2.

El valor de α para el cual las rectas r_1 y r_2 se cortan perpendicularmente es:

a) ___ -4 b) ___ $\frac{1}{4}$ c) ___ 4 d) ___ $-\frac{1}{4}$

1.2.3 Si ordenamos en forma ascendente las variables x; y; z para:

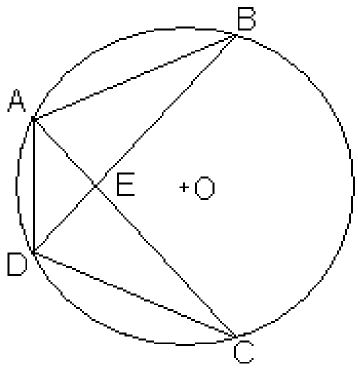
$x = \text{sen } 15^0$ $y = \log 0{,}1$ $z = \sqrt{\sqrt{16^{-1}}}$ se obtiene que:

a)___ $x < y < z$ b) ___ $y < z < x$ c) ___ $z < x < y$ d) ___ $y < x < z$

2. En la circunferencia C(o,u),
A, B, C, D puntos que pertenecen a la circunferencia,
$\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se intersecan en el punto E.
$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ y $\overset{\frown}{AB} = 60^0$.

a) Prueba que $\overline{BE} = \overline{EC}$

b) Calcula la amplitud del $\angle BEC$

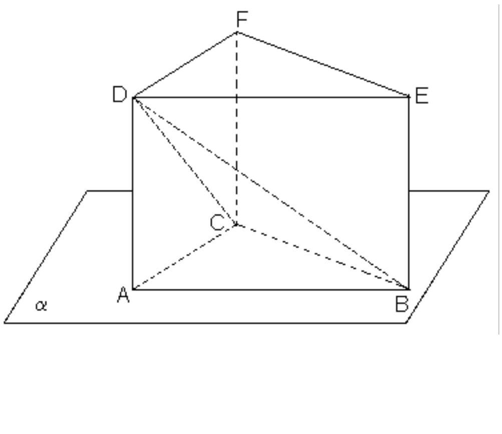


3. Resuelve la siguiente ecuación, para $0 \leq x \leq 2\pi$, $(x \in \Re)$

$$4^{\log_4 \sqrt{4\cos 2x - \cos x - 1}} - 2 = 0$$

4. En las pasadas elecciones del poder popular realizadas en nuestro país, en una circunscripción asistió a las urnas el 96% del total de electores. En dicha circunscripción fueron propuestos tres candidatos, María, Luís y José. Al realizar el conteo, se comprobó que todos los votos emitidos fueron válidos, que María obtuvo las dos quintas partes del total de votos, que Luís obtuvo 120 votos más que José y que María obtuvo el doble de los votos obtenidos por José.
a) ¿Cuántos votos fueron válidos en esa circunscripción?
b) ¿Cuántos electores tenía esa circunscripción?

5. La figura muestra un prisma recto ABCDEF cuya base inferior es el triángulo ACB rectángulo en C el cual se encuentra sobre el plano α.
La distancia entre los planos que contienen a las bases del prisma es de 8,0 cm,
la oblicua $\overline{DC}$ forma con la base inferior del prisma un ángulo φ tal que $\tan \varphi = \frac{4}{3}$
y el perímetro de la cara rectangular



ABED del prisma es igual a $8(2 + \sqrt{21})$ cm.
a) Prueba que el triángulo DCB es rectángulo en C.
b) Calcula el volumen de la pirámide ABCD, la cual está inscrita en el interior del prisma.

2007 – 2008 (segunda Convocatoria)

1. Selecciona la respuesta correcta marcando con una x sobre la línea dada.

1.1 Si $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ y $\alpha \in$ III cuadrante, entonces:

________ a) $\tan\alpha = \frac{4}{5}$ ________ b) $\tan\alpha = -\frac{4}{3}$

________ c) $\tan\alpha = \frac{4}{3}$ ________ d) $\tan\alpha = \frac{3}{4}$

1.2 El conjunto imagen de la función f, dada por su ecuación $f(x) = -(x + 3)^2 - 2$ es:

________ a) $\operatorname{Im} f = \{y \in \Re : y > -2\}$ ________ b) $\operatorname{Im} f = \{y \in \Re\}$

________ c) $\operatorname{Im} f = \{y \in \Re : y \leq -2\}$ ________d) $\operatorname{Im} f = \{y \in \Re : -3 \leq y \leq -2\}$

1.3 Si $\log_5 x + \log_5 (3x - 1) = \log_5 2$, entonces la solución de la ecuación es:

________ a) $x_0 = 1$ ó $x_1 = -\frac{2}{3}$ ________ b) $x_0 = 1$

________ c) $x_0 = \frac{1}{3}$ ________ d) $x_0 = -1$ ó $x_1 = \frac{1}{3}$

1.4 La pendiente de la recta que pasa por los puntos A(–2; 4) y B(1; –3) es:

________ a) $m = \frac{7}{3}$ ________ b) $m = -1$

________ c) $m = -\frac{3}{7}$ ________ d) $m = -\frac{7}{3}$

1.5 El conjunto dominio de la función f, dada por ecuación $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - 2x}}$, es:

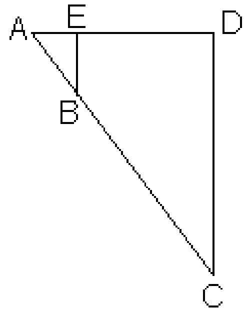
________ a) $x \in (-\infty; 2)$ ________ b) $x \in (2; +\infty)$

________ c) $x \in (-\infty; 2]$ ________ d) $\{x \in R / x \neq 2\}$

2. En el torneo NORCECA de voleybol femenino que se celebró en el mes de Diciembre del 2007 en la ciudad de Monterrey, México; el equipo cubano debutó con victoria de 3 tiempos a 0 frente al equipo de Canadá, con los siguientes marcadores en cada tiempo: (25 - 20), (25 - 23) y (25 - 23). La principal anotadora por el equipo cubano fue Zoila Barros, le siguieron Nancy Carrillo y Yumilka Ruiz, las que anotaron, cada una, un punto menos que Zoila y le siguió Rosir Calderón que anotó dos puntos menos que “la Barros”.

Si entre las cuatro anotaron el 64% de los puntos del equipo, ¿cuántos puntos anotaron cada una de estas atletas?

3. En la figura, triángulo ACD, rectángulo en D. E, punto que pertenece a $\overline{AD}$. B, punto que pertenece a $\overline{AC}$; $\overline{BE} \perp \overline{AD}$; $\overline{BE} = \frac{2}{9}\overline{DE}$; $\overline{BC} = 30\text{ cm}$; $\operatorname{sen} \angle ACD = \frac{3}{5}$.



a) Demuestra que el triángulo ACD es semejante al triángulo ABE.

b) Halla el área del triángulo ACD.

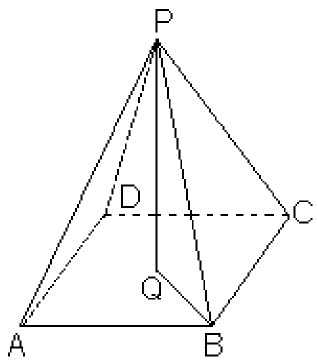
4. Sean f, g y h las funciones tales que: $f(x) = \frac{1}{\cos x} + \tan x$; $g(x) = \frac{1}{1 - \operatorname{sen} x}$ y $h(x) = \cos x$.

a) Prueba que $\frac{f(x)}{g(x)} = h(x)$ es una identidad para todos los valores admisibles de la variable x.

b) Halla todas las soluciones de la ecuación $\frac{f(x)}{g(x)} = (h(x))^2 \quad (x \in \Re)$

5. En la figura se muestra una pirámide recta ABCDP de base cuadrada ABCD con un volumen de $36\sqrt{6}$ cm^3; las aristas laterales forman un ángulo de 60° con la base y $\overline{PQ}$ es su altura.

Calcula el área lateral de dicha pirámide.



2008 – 2009 (primera Convocatoria)

1. Lee detenidamente la pregunta y responde:

1.1 Clasifica las siguientes proposiciones en verdaderas o falsas. Escribe V o F en la línea dada. Justifica las que sean falsas.

a) ___ El conjunto imagen de la función h definida en $\Re$ por la ecuación $h(x) = (3)^{x-4} - 9$ es $\{y \in R\text{: } y \geq -9\}$.

b) ___ La función cuya ecuación es $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ es monótona decreciente en todo su dominio.

c) ___ La función g definida en $\Re$ por la ecuación $g(x) = (x-1)^2 + 3$ es una función par.

d) ___ La función f definida por la ecuación $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2$ es negativa para todo valor real x tal que $x < 0$.

1.2 Selecciona la respuesta correcta marcando con una X en la línea dada.

1.2.1 El valor numérico de a en la ecuación de la función f definida en el conjunto de los números reales por $f(x) = ax^2 - 2x + a$ siendo $f(2) = 3$ es:

a) ___ 3 b) ___ $\dfrac{7}{5}$ c) ___ $\dfrac{5}{7}$ d) ___ 2.

1.2.2 Los valores de $x \in \Re$ para los cuales se cumple que $2^{3x-2} \geq 1$ son:

a) ___ $x < \dfrac{3}{2}$ b) ___ $x \geq \dfrac{3}{2}$ c) ___ $x \geq \dfrac{2}{3}$ d) ___ $x \geq -\dfrac{2}{3}$.

1.2.3 El punto de intersección entre la recta r, de ecuación r: $3x - 2y - 5 = 0$ y el eje "y" es:

a) ___ $(0; \dfrac{5}{3})$ b) ___ $(-\dfrac{5}{2}; 0)$ c) ___ $(\dfrac{5}{3}; 0)$ d) ___ $(0; -\dfrac{5}{2})$

1.2.4 El dominio de la función p definida por la ecuación $p(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x}{x-1}}$ es:

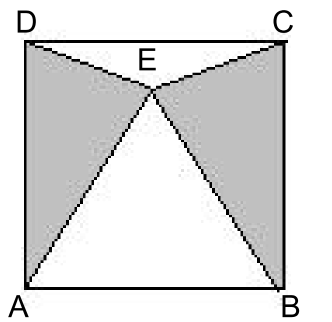
a) ___ $\{x \in R\text{: } 0 \leq x \text{ ó } x > 1\}$ b) ___ $x \in R$ c) ___ $\{x \in R\text{: } x \neq 1\}$ d) ___ $\{x \in R\text{: } 0 < x < 1\}$

2. Sean las expresiones trigonométricas $P(x) = \text{sen } 2x\cos x + 2\text{sen}^3 x$ y $Q(x) = 2 \text{ sen } x$.

a) Prueba que $P(x) = Q(x)$ es una identidad para todos los valores admisibles de la variable x.

b) Determina todas las $x \in \Re$ con $x \in [0; 2\pi]$ tales que $P(x) = 2\cos 2x$.

3. En la figura, ABCD es un cuadrado de 8,0 cm de lado.
E, punto interior de ABCD formándose el triángulo ABE equilátero.



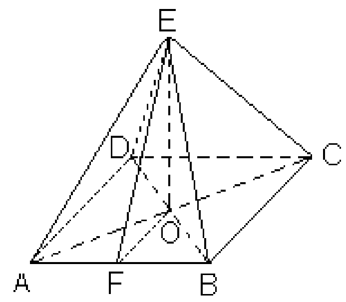
a) Demuestra que $\overline{DE} = \overline{CE}$.

b) Calcula el área de la región sombreada.

4. En los meses de agosto y septiembre del año pasado nuestro país fue azotado por los huracanes Gustav y Ike. Debido a las afectaciones provocadas se decidió, por parte de la dirección del país, asignar materiales de construcción en las zonas más afectadas como parte del programa para la recuperación. En un Consejo Popular de la provincia La Habana se asignaron 3 t más de cemento que de arena. Al transcurrir una semana, se determinó que aún faltaban por descargar el 20 % de la cantidad de toneladas de cemento y el 70 % de la cantidad de toneladas de arena lo cual equivale a que se tendrán que entregar 6,9 t más de arena que de cemento. ¿Cuántas toneladas de cada material se entregaron?

5. Sea ABCDE una pirámide recta de vértice E, cuya base es el cuadrado ABCD.

- O punto de intersección de las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ del cuadrado ABCD y proyección del vértice E sobre el plano que contiene a la base de la pirámide.
- F punto medio de $\overline{AB}$, $\angle$ AEB = 60^0 y $\overline{EF}$ = 12,0 cm.



a) Clasifica el triángulo EFB según sus ángulos. Justifica tu respuesta.

b) Calcula el volumen de la pirámide.

c) Halla el área lateral de la pirámide.