CONJUNTOS NUMÉRICOS

N $\rightarrow$ simboliza el conjunto de los números naturales: **N** = $\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ \ldots\}$

Q+ $\rightarrow$ simboliza el conjunto de los números fraccionarios y está formado por todas las fracciones de la forma $\frac{a}{b}$; a,b$\in$**N** ; b $\neq$ 0, los cuales pueden escribirse como expresiones decimales finitas o infinitas periódicas.

Ejemplos: $\frac{2}{5}$; 2,31 ; $7,\overline{4}$

Z $\rightarrow$ simboliza el conjunto de los números enteros y está formado por los números naturales y sus opuestos: **Z** = $\{0\ ;\ \pm 1\ ;\ \pm 2\ ;\ \pm 3\ ;\ \pm 4\ ;\ \ldots\}$

Q $\rightarrow$ simboliza el conjunto de los números racionales y está formado por los números fraccionarios y sus opuestos.
Los números racionales se escriben como expresiones decimales, cuyo desarrollo decimal es finito o infinito periódico y se pueden representar de la forma $\frac{p}{q}$; p,q$\in$**Z** ; q $\neq$ 0.

Ejemplos: -2 ; 2 ; $-0,\overline{7}$; $0,\overline{7}$; $-\frac{4}{7}$; $\frac{4}{7}$; 1,25 ; $-1,25$

II $\rightarrow$ simboliza el conjunto de los números irracionales y está formado por las expresiones decimales infinitas no periódicas.
Ejemplos: $\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$; 3,1416…

R $\rightarrow$ simboliza el conjunto de los números reales y está formado por los números racionales y los irracionales.

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{II}$$

Entre los conjuntos numéricos se cumplen las siguientes relaciones:

$\mathbf{N} \subset \mathbf{Q_+} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ $\quad\quad$ $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ $\quad\quad$ $\mathbf{II} \subset \mathbf{R}$

TANTO POR CIENTO

a es el x% de **b** si se cumple que: $x = \frac{a}{b} \cdot 100$

Para calcular otro de los elementos que intervienen en la relación, se puede utilizar cualquiera de los procedimientos siguientes:
- despejo en la fórmula,
- razonamientos sobre proporcionalidad,
- razonamiento sobre fracciones (reducción a la unidad).

RAZONES Y PROPORCIONES

La **razón** de dos cantidades es una división indicada o fracción y para hallarla se forma el cociente entre ellas y se puede simplificar tanto como sea posible.

La razón entre **a** y **b** es $\frac{a}{b}$ o lo que es lo mismo a : b, ($b \neq 0$).

La igualdad entre dos razones, recibe el nombre de **proporción**.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad (b \neq 0 \, , \, d \neq 0)$$

En toda proporción se cumple que el producto de los extremos es igual al producto de los medios:

$a \cdot d = b \cdot c$ (Propiedad fundamental de las proporciones)

PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS

Sean $a,b \in \mathbf{Q}$; $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $m,n \in \mathbf{Z}$, se cumple que:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

2. $a^m : a^n = a^{m-n}$

3. $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$

4. $a^m : b^m = (a : b)^m$

5. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Además se cumple que: $a^0 = 1$

$a^{-k} = \frac{1}{a^k}$ ($k \in \mathbf{N}$)

NOTACIÓN CIENTÍFICA

Un número está expresado en notación científica si se escribe en la forma:

$a \cdot 10^k$; $1 \leq a < 10$ y $k \in \mathbf{Z}$

VALOR ABSOLUTO

El valor absoluto o módulo de un número racional se determina de la siguiente forma:
- Si el número racional es positivo, su módulo es el propio número.
- Si el número racional es negativo, su módulo es el opuesto del propio número.
- El módulo de cero es cero.

PRODUCTOS NOTABLES

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ $\qquad$ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL

Factor común: $ax + bx = x(a + b)$

Diferencia de cuadrados: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Trinomio cuadrado perfecto: $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

Trinomio $x^2 + px + q = (x + a)(x + b)$; con $a + b = p$ y $ab = q$

Trinomio $mx^2 + px + q = (ax + b)(cx + d)$; con $m = ac$; $p = ad + bc$ y $q = bd$

ECUACIONES LINEALES

- Las ecuaciones del tipo $ax + b = c$ $(a \neq 0)$ se denominan lineales en una variable y se resuelven despejando la x.

ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

- La ecuación del tipo $ax^2 + bx + c = 0$, $(a, b, c \in R$; $a \neq 0)$ se denominan cuadráticas o de segundo grado.

- Para hallar las soluciones de una ecuación cuadrática se utiliza:
- ♦ La factorización, (cuando se puede realizar a simple vista).
- ♦ La fórmula general: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

D = $b^2 - 4ac$ es el discriminante y nos permite determinar la cantidad de soluciones que tiene una ecuación cuadrática.

- Si **D > 0**, la ecuación tiene dos soluciones reales.
- Si **D = 0**, la ecuación tiene una solución real.
- Si **D < 0**, la ecuación no tiene soluciones reales.

FUNCIÓN LINEAL

- Una función **f** es una correspondencia que a cada elemento de un conjunto **A**, asocia un único elemento de un conjunto **B**. Se denota **f**: **A** $\rightarrow$ **B**.

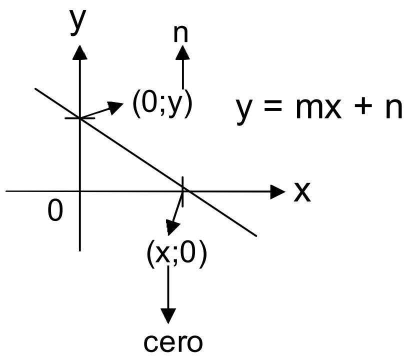
- El conjunto **A** se denomina **dominio** de la función y a sus elementos se les llaman **argumentos** o **preimágenes**.

- A los elementos de **B** que son correspondientes de algún elemento de **A** se les llaman **imágenes**, y el conjunto de ellos se denomina **conjunto imagen**.

- La función que a cada $x \in \mathbf{R}$ le hace corresponder el número real f(x) = **m**x + **n**, donde **m** y **n** son números reales dados, se denomina **función lineal**.

- El dominio y la imagen de una función lineal es el conjunto de los números reales.

- La representación gráfica de una función lineal es una **recta**.
- Para representar una recta basta con dos puntos de su representación gráfica.
Es frecuente tomar los interceptos con los ejes de coordenadas (x ; 0) y (0 ; y) para representar la recta.



- La ecuación de una función lineal es y = **m**x + **n**, donde **m** es la pendiente de la recta (su inclinación respecto al eje x) y **n** es el intercepto de la recta con el eje y.

- El elemento del dominio de la función y = **m**x + n (**m** $\neq$ 0) cuya imagen es cero, se denomina **cero** de esta función.

- El cero de una función lineal se calcula sustituyendo en la ecuación la y por cero y despejando la x. Gráficamente el cero es el intercepto de la recta con el eje x.

- La pendiente **m** de una recta que pasa por los puntos $P_1(x_1 ; y_1)$ y $P_2(x_2 ; y_2)$ se calcula utilizando la fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \;;\; x_1 \neq x_2.$$

- La pendiente **m** nos indica la inclinación de la recta respecto al eje x.
Si **m** > 0, la función es creciente y la recta se inclina hacia arriba de izquierda a derecha,
Si **m** < 0, la función es decreciente y la recta se inclina hacia abajo de izquierda a derecha,
Si **m** = 0, la función es constante y la recta es paralela al eje x.

SISTEMAS DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS VARIABLES

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

- Los sistemas de ecuaciones pueden resolverse por adición y sustracción (o sea, por eliminación de variables) y por sustitución.

- Los sistemas de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos variables pueden:
- ♦ tener solución única y se representa como un par ordenado de la forma (x ; y)
- ♦ tener infinitas soluciones
- ♦ no tener solución.

Si despejamos la y en las ecuaciones del sistema, obtenemos las ecuaciones de dos funciones lineales:

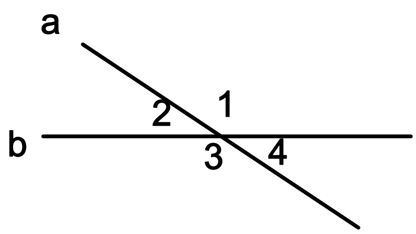
$$\begin{cases} y = m_1x + n_1 \\ y = m_2x + n_2 \end{cases}$$

cuyas representaciones gráficas son rectas y podemos concluir que:

- Si $m_1 \neq m_2$, el sistema tiene una única solución y las rectas se intersecan.
- Si $m_1 = m_2$ y $n_1 = n_2$, el sistema tiene infinitas soluciones y las rectas son coincidentes.
- Si $m_1 = m_2$ y $n_1 \neq n_2$, el sistema tiene no tiene solución y las rectas son paralelas.

ÁNGULOS ENTRE DOS RECTAS QUE SE CORTAN

En la figura:
a y **b** se cortan en el punto O.

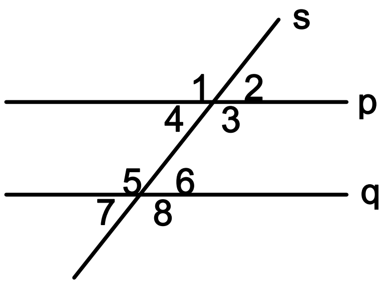


Opuestos por el vértice: $\angle 1$ y $\angle 3$; $\angle 2$ y $\angle 4$.
(Tienen la misma amplitud)

Adyacentes: $\angle 1$ y $\angle 2$; $\angle 1$ y $\angle 4$; $\angle 2$ y $\angle 3$; $\angle 3$ y $\angle 4$. (Suman 180º)

ÁNGULOS ENTRE PARALELAS CORTADAS POR UNA SECANTE

En la figura:
r // **p** y **s** secante.



Correspondientes: $\angle 1$ y $\angle 5$; $\angle 4$ y $\angle 7$;
$\angle 2$ y $\angle 6$; $\angle 3$ y $\angle 8$.
(Tienen igual amplitud)

Alternos: $\angle 1$ y $\angle 8$; $\angle 2$ y $\angle 7$; $\angle 4$ y $\angle 6$; $\angle 3$ y $\angle 5$. (Tienen igual amplitud)

Conjugados: $\angle 1$ y $\angle 7$; $\angle 4$ y $\angle 5$; $\angle 2$ y $\angle 8$; $\angle 3$ y $\angle 6$. (Suman 180º)

PROPIEDADES DE ALGUNAS FIGURAS PLANAS

Mediatriz de un segmento: Es la recta perpendicular al segmento y que pasa por su punto medio.
- Todos los puntos situados sobre la mediatriz de un segmento equidistan de los extremos de dicho segmento.

Bisectriz de un ángulo: Es la semirrecta que tiene su origen en le vértice del ángulo y divide a este en dos ángulos iguales.
- Todos los puntos situados sobre la bisectriz de un ángulo equidistan de los lados de este ángulo.

TRIÁNGULOS

En todo triángulo se cumple que:
- La suma de las amplitudes de los ángulos interiores es igual a 180º.
- La amplitud de cada ángulo exterior es igual a la suma de las amplitudes de los ángulos interiores no adyacentes a él.
- A lados iguales se oponen ángulos iguales y viceversa.
- A mayor lado se opone mayor ángulo y viceversa.
- La suma de dos lados cualesquiera es mayor que el tercero (Desigualdad Triangular).

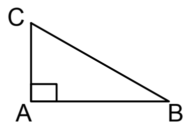
CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS

De acuerdo a la longitud de sus lados:
- **equilátero:** iguales sus tres lados y sus tres ángulos.
- **isósceles:** dos lados iguales y los ángulos opuestos a ellos (ángulos bases), también son iguales.
- **escaleno:** sus tres lados de diferentes longitudes.

De acuerdo a la amplitud de sus ángulos:
- **acutángulo:** sus tres ángulos agudos.
- **rectángulo:** un ángulo recto.
- **obtusángulo:** un ángulo obtuso.

TEOREMA DE PITÁGORAS

- Si un triángulo es rectángulo, se cumple que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



$$\overline{CB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

- Si en un triángulo el cuadrado del lado mayor es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, entonces dicho triángulo es rectángulo (Teorema recíproco).

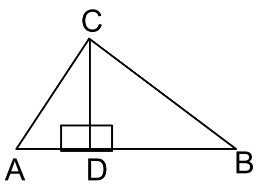
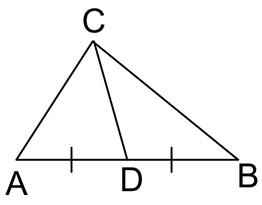
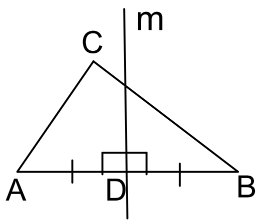
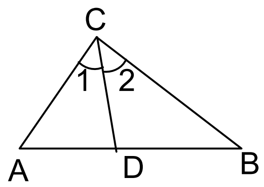
RECTAS NOTABLES DE UN TRIÁNGULO

Alturas: son los segmentos de perpendicular trazados desde los vértices hasta los lados opuestos. (Fig.1)

Medianas: son los segmentos determinados por los vértices y el punto medio del lado opuesto. (Fig.2)

Mediatrices: son las mediatrices de cada uno de los lados de un triángulo. (Fig.3)

Bisectrices: son los segmentos de bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo, comprendidos entre cada vértice y el lado opuesto. (Fig.4)

(Fig.1)	(Fig.2)	(Fig.3)	(Fig.4)
 $\overline{CD} \perp \overline{AB}$	 $\overline{AD} = \overline{DB}$	 $\overline{AD} = \overline{DB}$ y m $\perp$ $\overline{AB}$	 $\angle 1 = \angle 2$

- En todo triángulo las mediatrices se cortan en un punto (**circuncentro**) y esta misma propiedad se cumple para las alturas (**ortocentro**), las medianas (**baricentro**) y las bisectrices (**incentro**).

- En un triángulo equilátero las rectas notables, relativas a cualquiera de sus lados, coinciden. En el triángulo isósceles solamente coinciden las relativas al lado base.

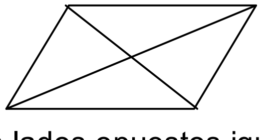
- **Paralela media de un triángulo:** Segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo. Es paralelo al otro lado y su longitud es la mitad de la longitud del lado a la cual es paralelo.

CRITERIOS DE IGUALDAD DE TRIÁNGULOS

Dos triángulos son iguales si tienen respectivamente iguales:
- Un lado y los ángulos adyacentes a él (**a.l.a.**).
- Dos lados y el ángulo comprendido (**l.a.l.**).
- Sus tres lados (**l.l.l.**).

- En triángulos iguales a lados respectivamente iguales se oponen ángulos iguales y viceversa.

PARALELOGRAMOS

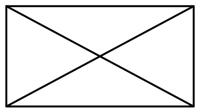


Los paralelogramos tienen sus lados opuestos iguales y paralelos. Sus ángulos opuestos son iguales y los consecutivos suman 180º. Las diagonales se cortan en su punto medio.

- La suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un cuadrilátero es 360º.

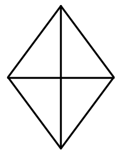
Los rectángulos y los rombos son paralelogramos especiales.

Rectángulo



- Sus cuatro ángulos son rectos.
- Sus diagonales son iguales.

Rombo



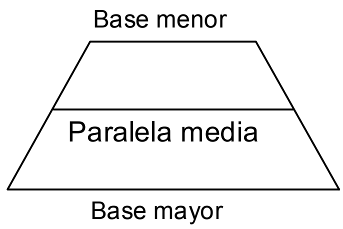
– Sus cuatro lados son iguales.
– Sus diagonales son perpendiculares y bisecan el ángulo de donde parten.

- El **cuadrado** es un paralelogramo que es a la vez rectángulo y rombo.

- **Paralela media de un paralelogramo:** es el segmento que une los puntos medios de los lados opuestos de un paralelogramo. Es paralela a los otros dos lados y tiene igual longitud que los lados a los cuales es paralela.

Trapecio

- Los trapecios son cuadriláteros que tienen un par de lados paralelos, llamados bases.



$$P_M = \frac{B+b}{2}$$

- El segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio (**paralela media**) es paralelo a las bases y su longitud es igual a la semisuma de las longitudes de ellas.

- **Trapecio isósceles:** Trapecio cuyos lados no paralelos tiene igual longitud.

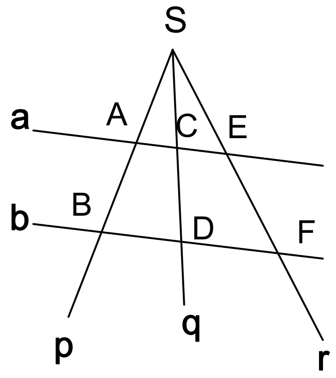
- **Trapecio rectángulo:** Trapecio que tiene dos ángulos rectos.

- **Trapezoide:** Cuadrilátero convexo que no tiene lados paralelos.

- **Trapezoide simétrico:** Trapezoide con dos lados consecutivos iguales. Las diagonales de un trapezoide simétrico son perpendiculares.

TEOREMA DE LAS TRANSVERSALES

- En la figura: **a** // **b** y **p**, **q**, **r**, semirrectas de origen común **S**. **a** corta a **p**, **q** y **r** en A, C y E respectivamente; **b** corta a **p**, **q** y **r** en B, D y F respectivamente.



Se cumple que:

Primera parte: $\frac{\overline{SA}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{SD}}$; $\frac{\overline{SA}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{SE}}{\overline{SF}}$

Segunda parte: $\frac{\overline{SA}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}}$; $\frac{\overline{SC}}{\overline{SD}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{DF}}$

Tercera parte: $\frac{\overline{AC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DF}}$

(Solamente aparecen algunos ejemplos para cada parte).

- También se cumple el teorema recíproco.

FÓRMULAS

Figuras	Área	Perímetro
Triángulo	$A = \frac{b \cdot h}{2}$	P = a + b + c
Paralelogramo	$A = b \cdot h$	P = 2(a + b)
Rectángulo	$A = b \cdot h$	P = 2(a + b)
Rombo	$A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$	P = 4a
Cuadrado	$A = a^2$	P = 4a
Trapecio	$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$	P = a + b + c + d
Círculo	$L = 2\pi r$	$A = \pi r^2$

CIRCUNFERENCIA

- La **circunferencia** es un conjunto de puntos que equidistan de uno llamado **centro**. La distancia de cualquiera de sus puntos al centro es el **radio**.

- El segmento determinado por dos puntos en una circunferencia es una **cuerda**. Si el centro está en la cuerda, entonces la cuerda es un **diámetro** (d = 2r).

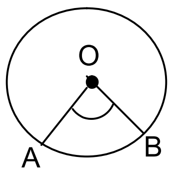
- Si una recta toca a la circunferencia en un punto, es **tangente** a ella. Las tangentes trazadas desde un punto a la circunferencia (son dos) son iguales.
- La recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio que tiene como extremo el punto de tangencia. El teorema recíproco también se cumple.

- Si un radio (diámetro) divide a una cuerda a la mitad, es perpendicular a ella y viceversa.

- Dos puntos de una circunferencia determinan dos **arcos**. Si los puntos son los extremos de un diámetro, entonces los arcos son **semicircunferencias**.

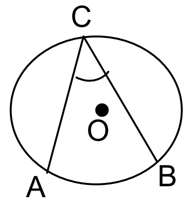
ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

- **Ángulo central:** Es el ángulo que tiene su vértice en el centro de la circunferencia.
La amplitud del ángulo central es la misma que la del arco que determina.



$\angle AOB = \overset{\frown}{AB}$

- **Ángulo inscrito:** Es el ángulo cuyo vértice es un punto de la circunferencia y los lados que lo forman intersecan a la circunferencia en otros dos puntos.
La amplitud del ángulo inscrito es la mitad del arco que determina.



$$\angle ACB = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$$

- En una misma circunferencia, o en circunferencia iguales, a ángulos centrales iguales corresponden arcos iguales y viceversa.

- En una misma circunferencia, o en circunferencia iguales, a ángulos centrales (arcos) iguales corresponden cuerdas iguales y viceversa.

- En una misma circunferencia, o en circunferencia iguales, a mayor cuerda corresponde un mayor arco.

- Los ángulos inscritos en una circunferencia, a los cuales les corresponde el mismo arco (la misma cuerda), son iguales.

- Si a un ángulo en una circunferencia le corresponde un arco que es una semicircunferencia, entonces es un ángulo recto (teorema de Tales). El teorema recíproco también se cumple.

ESTADÍSTICA

- VARIABLES ESTADÍSTICAS

- Cualitativas
- Cuantitativa $\begin{cases} \textit{discretas} \\ \textit{continuas} \end{cases}$

<u>- Variables cualitativas</u>: Se refieren a características o atributos que expresan una cualidad que no puede tomar valores numéricos, o sea, no se pueden medir.
<u>Ejemplos:</u>
La profesión de tus padres (profesor, médico, mecánico, etc) .
El estado civil (soltero, casado).
El color de los ojos (verdes, azules, pardos, etc).
La carrera que piensas estudiar (periodismo, magisterio, medicina, etc).

<u>- Variables cuantitativas</u>: Se refieren a atributos que expresan una cantidad o cantidad de magnitud y por tanto toma valores numéricos, o sea, se pueden medir.
<u>Ejemplos:</u>
1) La edad de una persona (2 años, 15 años, …).
2) La cantidad de alumnos de un grupo o escuela (15, 30, 700, 1200,…).
3) La talla de una persona (1,64 m, 2,00 m, …).
4) Los registros de temperatura de una ciudad (30ºC, –5ºC, 0ºC, …).

Las variables cuantitativas son de dos tipos: **discretas** y **continuas**.

<u>Variable estadística discreta</u>: Cuando solo pueden tomar un número finito o a lo sumo numerable de valores.
En el ejemplo anterior de variables cuantitativas **discretas** serían los dos primeros: la edad de una persona y la cantidad de alumnos de un grupo o escuela que sólo pueden tomar un número finito de valores.

<u>Variable estadística continua</u>: Cuando puede, teóricamente, tomar cualquier valor de un intervalo real.
En el ejemplo anterior de variables cuantitativas **continuas** serían los dos últimos: la talla de una persona y los registros de temperatura de una ciudad, que pueden tomar varios valores dentro de un intervalo.

MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL PARA DATOS SIMPLES

- La **Media Aritmética** $\overline{x}$ es el valor alrededor del cual se encuentran los datos de una lista.

Se calcula mediante la fórmula: $\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$.

- La **Moda** de un conjunto de valores x_1, x_2, x_3,…, x_n es el valor (o los valores) que se presenta(n) con más frecuencia en ese conjunto.

- La **Mediana** de un conjunto de valores x_1, x_2, x_3,…, x_n dispuestos en orden creciente (o decreciente) es:

- El valor que equidista de los extremos, si n es impar.
- La media aritmética de los valores centrales, si n es par.

DATOS AGRUPADOS EN CLASES

- **Clase:** Una clase es el conjunto de todos los individuos u observaciones de la variable, que se encuentran entre determinados límites.
Ejemplo: $10 \leq x < 20$, en esta clase se incluyen todos los datos comprendidos desde 10 hasta 20, sin incluir este último.

Cuando se agrupa un conjunto de datos mediante clases de frecuencias es importante el dominio de un grupo de conceptos y términos como los siguientes:

- **Rango o recorrido de la variable:** es la diferencia entre el mayor y el menor de los valores dados en los datos.

- **Límites de clases:** Son los valores extremos que delimitan cada clase. El menor es el límite inferior L_i y el mayor es el límite superior L_s.
Ejemplo: En la clase $10 \leq x < 20$, $L_i = 10$ y $L_s = 20$.

- **Amplitud de clases:** es la amplitud de la clase, la cual se obtiene mediante la diferencia: $L_s - L_i$
Ejemplo: En la clase $10 \leq x < 20$, la amplitud es 10.

MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL PARA DATOS AGRUPADOS EN CLASES

- **Media:** La media para datos agrupados en clases se calcula de la siguiente forma:
1. Se hallan las marcas de clase.

- **Marca de clase:** La marca de clase es la media aritmética de los valores correspondiente al límite inferior y superior de cada clase. Así, la marca de la clase *i* es:

$$x_i = \frac{L_S + L_I}{2}.$$

2. Se multiplica la marca de clase por la frecuencia absoluta de la clase correspondiente.

3. Se adicionan los productos hallados.

4. Se divide la suma obtenida por la cantidad de datos.

- Clase Modal: Es la clase de mayor frecuencia absoluta.

- Clase Mediana: Es la clase que contiene a la mediana.