UNA BREVE MIRADA AL DESAFIANTE MUNDO DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

Enech García Martínez
UCPEJV
e-mail:enechgm@ucpejv.rimed.cu

Un problema siempre representa un desafío para cualquier persona. Muchos son los problemas que emergen de los temarios de las olimpíadas nacionales e internacionales, otros en entrenamientos específicos y aunque pasen los años continúan siendo interesantes, ejemplo de ello tenemos:

Problema 1: (Inglaterra 1975)

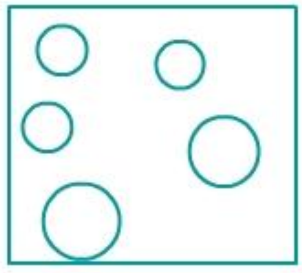
1-Un disco cerrado de radio 1 contiene 7 puntos tales que todas las distancias entre dos de ellos son mayores o iguales que 1. Pruebe que uno de los 7 puntos es el centro del disco.

S/ Sea O el centro del disco. Si los 7 puntos son diferentes de O, consideremos un radio que barra el disco girando 360^0 en el sentido de las agujas del reloj, y numeremos los puntos en el orden en que pasa el radio por ellos como P_1, $P_2, \ldots, P_7$. Pongamos además $P_8=P_1$. Como la suma de los ángulos centrales es: $\angle P_1OP_2 + \angle P_2OP_3 + \ldots \angle P_6OP_7 + \angle P_7OP_8 = 360^0$, para algún "i" se tiene $\angle P_iOP_{i+1} \leq \left(\frac{360^0}{7}\right) < 60°$. Entonces alguno de los ángulos $\angle OP_iP_{i+1}$ ó $\angle OP_{i+1}P_i$ es mayor que 60° (de lo contrario los tres ángulos del ΔOP_iP_{i+1} sumarían menos de 180°) y el lado opuesto, (OP_i o OP_{i+1}) sería mayor que P_iP_{i+1}, que entonces resultaría menor que 1, lo que es absurdo.

2- En el interior de un cuadrado de lado 1 están distribuidas varias circunferencias, la suma de las longitudes de las cuales es igual a 10. Demuestra que existe una recta que corta al menos 4 de estas circunferencias.
S/
Sea L = 10 la suma de todas las circunferencias,

$$L = \pi\cdot d_1 + \pi\cdot d_2 + \ldots + \pi\cdot d_n = \pi(d_1 + d_2 + \ldots + d_n) \text{ y}$$

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_n = \frac{10}{\pi}.$$



Si hay 4 circunferencias de modo tal que exista una recta que las corte, estaría resuelto el problema.
Supongamos que no existe, como la suma de los diámetros

es $\frac{10}{\pi}$ < 3,15, entonces $3\pi < 9,45$ y $10 > 9,45$ por lo

que $10 > 3\pi$ y $\frac{10}{\pi} > 3$.

Si n fuera igual a 3 entonces $d_1 + d_2 + d_3 = \frac{10}{\pi}$ lo que es mayor que 3 por lo tanto no puede ser, ya que alguno de estos diámetros tiene que ser mayor que 1, y si fuera así no estaría en el interior del cuadrado de lado 1.

Como $\frac{10}{\pi} > 3$ hay al menos 4 circunferencias de forma que si las pusiéramos una a continuación de la otra (solo trasladándola hasta que todos los centros estén alineados) se cortarían, es decir que tienen parte del diámetro común a las 4 circunferencias. Por lo que si se traza una recta que pase por la parte común de los diámetros al separarlas y regresarlas a su lugar (a las circunferencias) corta a las 4 circunferencias.

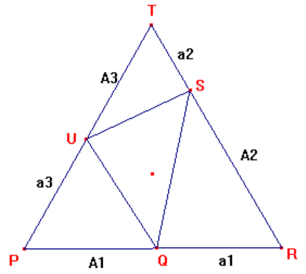
Hace aproximadamente 9 años se propuso en la Olimpíada Bolivariana (2000) el siguiente dúo de problemas que en la actualidad sirven para ilustrar lo útil de una de las estrategias importantes en la resolución de problemas: "figuras y diagramas".
Veamos:

(OBM) 2000)
2- Sean a_1, A_1, a_2, A_2, a_3, A_3 números reales positivos tales que $a_i + A_i = k$ (k: constante dada).
a) Demostrar que $a_1 \cdot A_2 + a_2 \cdot A_3 + a_3 \cdot A_1 < k^2$
b) Sean a_1, A_1, a_2, A_2, a_3, A_3,$a_4 A_4$ números reales positivos tales que $a_i + A_i = k$ (k: constante dada). Si $a_i \geq A_i$, demostrar que:

$$a_1 \cdot A_2 + a_2 \cdot A_3 + a_3 \cdot A_4 + a_4 A_1 \leq k^2,$$

y determinar cuando se tiene la igualdad.

S/ Cada una de las cantidades que aparece en esta desigualdad puede interpretarse geométricamente como la longitud de un segmento, y los productos de dos cantidades como áreas. La igualdades $a_i + A_i = k$ pueden representarse mediante un segmento de longitud k dividido en dos partes de longitudes a_i y A_i. Con estos segmentos se puede construir un triángulo equilátero como se muestra en la figura:



El producto $a_i \cdot A_i$ está relacionado con el área (QRS), en este caso $(QRS) = a_1 A_2 \frac{\sqrt{3}}{4}$. De manera análoga $(STU) = a_2 A_3 \frac{\sqrt{3}}{4}$ y $(UPQ) = a_3 A_1 \frac{\sqrt{3}}{4}$

De lo anterior obtenemos:
(QRS) + (STU) + (UPQ) < (PRT)

Bastaría multiplicar por $\frac{4}{\sqrt{3}}$ para obtener lo pedido en a)

b) Para esta parte basta dibujar un cuadrado de lado k y dentro del mismo cuatro rectángulos correspondientes a los productos del miembro izquierdo de la desigualdad.

3- (OBM) 2000
Sea un entero positivo n par. Halle todas las ternas de números reales (x,y,z) tales que:

$$X^n y + y^n z + z^n x = xy^n + yz^n + zx^n$$

S/
La expresión $X^n y + y^n z + z^n x = xy^n + yz^n + zx^n$ es equivalente a

$$X^n(y - z) + y^n z = xy^n + z^n(y - z)$$

Restando y^{n+1} a ambos miembros resulta:

$$X^n(y - z) + y^n(z - y) = (x - y)y^n + z^n(y - x)$$

o bien:

$$(y^n - x^n)(z - y) = (z^n - y^n)(y - x) \ldots\ldots..(1)$$

De lo anterior podemos concluir que si dos de las tres cantidades x, y, z son iguales entonces la tercera también debe serlo, esto quiere decir que las ternas (x;y;z) cumplen la condición. Para las ternas con las tres componentes distintas, luego de dividir ambos miembros de (1) entre (z – y)(y – x) resulta:

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = \frac{y^n - z^n}{y - z} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(2)$$

Esta ecuación (2) se puede interpretar como una igualdad entre la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(x;x^n)$ y $(y;y^n)$ y la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(y;y^n)$ y $(z;z^n)$, en otras palabras, la condición es equivalente a que los tres puntos $(x;x^n)$, $(y;y^n)$ y $(z;z^n)$ sean colineales.
Observemos que como n es par la función $f(x)=x^n$ es convexa y por lo tanto no puede tener tres puntos diferentes alineados.