Ministerio de Educación

Concurso Nacional de Matemática. Educación Preuniversitaria.

Curso 2010 - 2011

Temario por grados:

Nombre: ___________________________ Grado: ______

Escuela: ___________________________ Provincia: ____________

Aclaraciones: Los alumnos según el grado responderán las preguntas que se aclaran.

Décimo: 1, 2, 3.

Onceno: 4, 5, 6.

Duodécimo: 7, 8, 9.

1. Sea $P(x) = x^3 + (t - 1)x^2 - (t + 3)x + 1$. ¿Para qué valores de $t \in R$, la suma de los cuadrados y de los recíprocos de las raíces de $P(x)$ es mínima?

2. En un cuadrilátero convexo ABCD el punto P de intersección de las diagonales AC y BD es tal que $\frac{AP}{PC} = \frac{4}{3}$ y $\frac{BD}{PB} = \frac{7}{4}$, la mediatriz de CD pasa por P. Se prolonga BC a partir de C y se toma un punto arbitrario E, con centro en E se traza una circunferencia que pasa por B y corta a la diagonal BD de nuevo en F, se traza EF y se prolonga AD. Sea G el punto de intersección de EF y AD. Demuestra que el cuadrilátero APGF es cíclico.

3. Determina todas las soluciones de la ecuación $3x^4 - 2024y + 1 = 0$, para $x, y \in Z$.

4. Sea ABC un triángulo acutángulo, CE altura ($E \in \overline{AB}$), CF bisectriz del $\angle ACB$ ($F \in \overline{AB}$), la recta CJ, ($J \in \overline{AB}$), es simétrica de la altura con respecto a la bisectriz. Sea D un punto en CJ ($J \in \overline{CD}$), tal que $\angle JBD = 90º + \angle EJC - \angle BAC$. Por J se traza una recta que corta a la recta CE en un punto K tal que $\frac{\overline{CE}}{\overline{EK}} = \frac{\overline{JC} - \overline{EJ}}{\overline{EJ}}$. Sea M el punto de intersección de esa recta con la bisectriz del $\angle CEF$. Demostrar que:

a) CD es un diámetro del circuncírculo del triángulo ABC.

b) CTJM es cíclico con T es el punto de intersección de CF y EM.

5. Sea t un entero positivo y sean a, b, c, d los cuatro divisores positivos de t más pequeños, tal que a < b < c < d. Encuentra todos los enteros positivos t para los cuales se cumple que $t^2 = a + b^2 + c^3 + d^4$.

6. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_{24} \in R$. Demuestra que:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + 24x_{24} - 439 \leq \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{24}^2}{2} + 2011$$

7. Determina todas las funciones

$f: R \to R$

$f(x) \cdot f(y) = 2f(x + y) + 9xy, \forall x, y \in R$

8. Sea A uno de los puntos de intersección de las circunferencias $W_1(O_1,R_1)$ y $W_2(O_2,R_2)$. Se sabe que l es una tangente a W_1 y W_2 en B y C respectivamente. Sea O_3 el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC. Se selecciona D, de modo que A es el punto medio de $\overline{O_3 D}$. Si M es el punto medio de $\overline{O_1 O_2}$, entonces prueba que $\angle O_1DM = \angle O_2DA$.

9. Halle un conjunto de enteros positivos con el mayor número posible de elementos tal que el mínimo común múltiplo de todos ellos sea menor que 2011.