ALGUNOS PRINCIPIOS Y ESTRATEGIAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Enech García Martínez
UCPEJV
enech@cubaeduca.cu
enechgm@gmail.com enechgm@ucpejv.rimed.cu

La única manera de aprender a resolver problemas es, obviamente, resolviendo problemas.
En muchas ocasiones se aplican estrategias y principios que resultan de gran utilidad en la resolución de ellos. En estas notas se abordan algunos de ellos y se ilustra su aplicación a la solución de problemas.

Alternación:

Problema 1:
Sobre un plano están ubicados 11 piñones unidos de manera que el 1 se une con el 2, el 2 con el 3, el 3 con el 4………el 10 con el 11 y el 11 está unido con el 1 formando un engranaje.
¿pueden todas las ruedas girar al mismo tiempo?
S/
Supongamos que el primer piñón gira en el sentido de las manecillas del reloj, entonces el segundo deberá girar contrario, el tercer piñón de nuevo girará en el sentido de las manecillas del reloj, el cuarto lo hará contrario y así sucesivamente. Esto nos indicará que los piñones con "números impares" girarán en el sentido de las manecillas el reloj y los piñones pares lo harán contrariamente, entonces, el 1 y el 11 giran al mismo tiempo en el sentido de las manecillas del reloj…… ¡¡contradicción!!........no es posible.
Este problema puede ser tratado con casos particulares, por ejemplo, con tres discos, con 5… …hasta darse cuenta donde radica "el secreto" de la solución.
Se puede comentar el impacto que causaría en un alumno encontrarse con 2011 piñones que cumplan con las exigencias del problema.

Lo principal en la solución de este problema es que los piñones alternan su movimiento.
La búsqueda de los objetos alternados es la principal consideración para la solución de los problemas siguientes.

Problema 2:
Asignemos coordenadas a las casillas del tablero de ajedrez, es decir, a,b,c,…..h, y 1,2,…..,8
Un caballo salió de la casilla a1 y después de varias jugadas regresó a ella. Demuestre que el caballo hizo un número par de jugadas.
S/
Debemos observar que, en cada jugada, el color de la casilla "donde llega" el caballo cambia de color, entonces tiene lugar la permutación de colores: blanco y negro.

Problema 3:
¿Puede un caballo recorrer de la casilla a1 hasta la casilla h8, pasando por cada una de las demás casillas exactamente una vez?
S/
No, no puede. Como el caballo debe hacer 63 jugadas, entonces en la última jugada (impar) el caballo estará en una casilla de otra paridad que …….pero a8 tiene el mismo color.

PARTICIÓN EN PAREJAS

Problema 4:
¿Se puede dibujar una línea poligonal cerrada de 9 segmentos, cada uno de los cuales se interseca exactamente con uno de los segmentos restantes?

S/
Si esto fuera posible, entonces, todos los segmentos de la línea poligonal se partirían en parejas intersecadas, pero esto obligaría a que el número de segmentos tiene que ser par.

Notemos que la idea principal del razonamiento es la siguiente: Si los objetos se pueden partir en parejas entonces su número debe ser par.
A continuación varios problemas similares.

Problema 5:
¿De cuántas maneras distintas se puede llenar un tablero de dimensión 5 x 5 con fichas rectangulares de dimensión 1 x 2 ?.
S/
No se puede, notemos que la cantidad de casillas es 25 (que no es divisible por 2) y cada ficha cubre dos casillas.

Problema 6:
Dado un polígono de 101 lados con un eje de simetría. Demuestre que el eje de simetría pasa por uno de sus vértices.
S/
Si el eje de simetría no pasa por el vértice, entonces los 101 puntos dados deberán dividirse en parejas simétricas, lo que es imposible.

PARIDAD E IMPARIDAD

Problema 7:
En cierto país hay billetes de 25 pesos. ¿Es posible "cambiar" un billete de 25 pesos en billetes de 1 peso, 3 pesos y 5 pesos para recibir 10 billetes en total?
S/
La solución de este problema está basada en la siguiente observación:
La suma de un número par de números impares es par. La generalización de esta afirmación se puede representar así: la paridad de la suma de varios números depende de la paridad del número de sumandos impares. Si el número de sumandos impares es (im)par, entonces la suma es (im)par.

Problema 8:
Pedro compró un cuaderno que tiene 96 hojas, las enumeró en orden de 1 hasta 192. Iván arrancó de este cuaderno 25 hojas y sumó todos los 50 números que habían escritos en las hojas. ¿Pudo Iván obtener el número 2010?
S/
La respuesta es no. En cada hoja la suma de los números de las páginas es impar, pero la suma de 25 números impares es impar también.

Problema 9:
El producto de 22 números enteros es igual a 1. Demuestre que su suma no es igual a cero.
S/
Entre estos números hay un número par de "menos uno". Para que la suma sea igual a cero, el número de "menos uno" debe ser 11 exactamente.

INVARIANTE

"…Un profesor le pide a sus alumnos escribir en sus libretas 11 números (6 ceros y 5 unos) y a continuación le propone que efectúen 10 veces seguidas la siguiente operación: "tachen dos

números cualesquiera, y si ellos eran iguales escriban en el final de los números restante un "cero", y si los números eran diferentes escriban un "uno".
Después de esperar que cada alumno terminase, el profesor dice "!todos ustedes debieron obtener un uno!
Es lógico que la mayoría de los alumnos quedan asombrados, ¿dónde está "el truco"?
El asunto es que después de cada operación, la suma de todos los números en las libretas será impar (verificar esto no es difícil), pues cada vez, la suma no cambia ó cambia por 2. Esto significa que después de 10 operaciones el número restante debe ser impar, o sea, igual a "1".
En la explicación de la solución seguramente mencionamos la palabra ***invariante***, es decir, algo que no varía, en nuestro caso lo que no varía es la paridad.

Problema 10:
En el alfabeto de la tribu UAU hay sólo dos letras: U y A. Además esta lengua posee las siguientes propiedades.
i-Si de la palabra quitamos UA (es decir, las letras U y A que están juntas), entonces el significado de la palabra no varía.
ii- El sentido de la palabra no varía al adicionar en cualquier lugar de la palabra la combinación de letras AU ó UUAA.
¿Se puede afirmar que las palabras UAA y AUU tienen el mismo significado?
S/
Observen que para cualquier operación de adición o de supresión del segmento de la palabra, la cantidad de letras U y A en ese segmento es igual. Esto significa que la diferencia de las cantidades de las letras U y A en la palabra no varía, es decir, es constante. Observen esto en el siguiente ejemplo:
A $\longrightarrow$ AAU $\longrightarrow$ AUUAAAU $\longrightarrow$ AU AAU
En todas estas palabras la cantidad de letras A es una más que la cantidad de letras U.
Ahora bien: En la palabra UAA la diferencia es igual a (-1), y en la palabra AUU es igual a 1. Esto significa que de la palabra UAA no se puede obtener la palabra AUU con las operaciones permitidas y por consiguiente no se puede afirmar que estas palabras tienen el mismo significado necesariamente.
Esta solución ilustra la idea principal del uso del ***invariante***. Nos han dado algunos objetos con los cuales nos permiten realizar operaciones determinadas. Después de esto surge la siguiente pregunta: ¿Se puede obtener un objeto de otro, utilizando estas operaciones?
Para responder a esta pregunta construimos alguna magnitud, la cual no cambia con las operaciones indicadas. Si el valor de esta magnitud no es igual para dos objetos indicados, entonces, es cierto que la respuesta a la pregunta formulada es negativa.

Problema 11:
Un círculo está dividido en 6 sectores, en cada uno de los cuales hay una ficha. Se permite mover cualesquiera dos fichas a los sectores vecinos en una jugada. ¿Se podrá reunir a todas las fichas en un mismo sector con la ayuda de tales operaciones?.
S/
Enumeremos los sectores con números de 1 hasta el 6 en sentido de las manecillas del reloj. Para cualquier posición de las fichas consideremos la siguiente magnitud: S es la suma de los números de los sectores, en los cuales están las fichas dadas (teniendo en cuenta la multiplicidad)

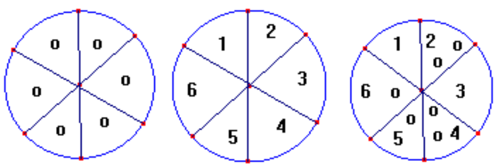


fig 1 fig 2 fig 3

Por ejemplo: para la posición de la fig 3 tenemos que: S=2+2+4+4+5+6=23. Está claro que, para el desplazamiento de una ficha al sector vecino, el sumando correspondiente a ella en la suma S cambia de paridad. Esto es significa que, si se desplazan simultáneamente dos fichas, entonces la paridad de la magnitud S no varía, ***ella es una invariante.*** Pero para la posición en la figura 1 S= 21. Si todas las fichas se encuentran en un sector con el número A, entonces S=6A es un número par (y el número 21 es impar). Esto quiere decir que desde la posición inicial no se puede obtener la posición en la cual las 6 fichas se encuentran en un mismo sector (ver figura 3).

A veces la invariante se usa no sólo para demostrar que algún objeto no se puede obtener del dado, si no, para averiguar, cuales objetos se pueden obtener del objeto inicial.

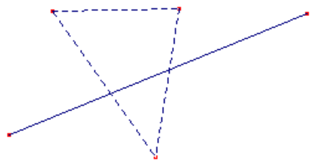
Comentario importante:
Si el tema sobre "Paridad" ya fue tratado y se resolvieron los problemas en los cuales la paridad figuraba como invariante, es necesario recordar esto a los estudiantes.
El tema de "Invariantes" tiene un carácter bastante abstracto y hasta el mismo principio del uso de las invariantes frecuentemente queda como "no entendido" y algo difícil para los estudiantes, es por eso que hay que ser sumamente cuidadosos en su explicación para que ellos traten de comprender la lógica misma de su uso. Es necesario analizar cada solución de los problemas y tratar de lograr que los estudiantes resuelvan, de manera individual, algunos de ellos. Debemos dar muchos ejemplos que ilustren la solución de cada problema, realizar el resumen lo más evidente posible y exponer claramente la lógica de la solución.
Debemos intentar introducir la palabra "invariante" y formular lo general de las invariantes solo después de que los estudiantes resuelvan ó analicen varios problemas sencillos con el uso de esta técnica.
Lo principal en la solución de los problemas sobre "invariantes" es que inventen una invariante por sí mismos. Adquirir esta habilidad es un reto, pero es posible con la práctica en la solución de problemas semejantes, pero no podemos olvidar lo siguiente:
i-las magnitudes inventadas deben ser invariantes.
ii-esas invariantes deben dar diferentes valores para dos objetos dados en las condiciones de los problemas.
iii- es necesario fijar enseguida la clase de objetos para los cuales va a determinarse nuestra magnitud.

PRINCIPIO DE LAS CASILLAS

Este principio se basa en la siguiente idea: si hay tres bolas que se reparten entre dos niños, a un niño le tocan dos (pero pudiera ser que las tres, pues un niño puede quedar sin bolas).
Este principio se puede enunciar de la manera siguiente:
"Si (n+1) objetos se deben acomodar en n casillas, en algunas de las casillas hay más de un objeto"
Este resultado se conoce como "Principio de las casillas", también es llamado "Principio de Dirichlet" ó "Principio de las palomas".
El matemático Peter Dirichlet fue el primero en utilizar este principio en teoría de números en el siglo XIX.
La validez es bastante evidente ya que bastaría pensar que pasaría si en cada casilla hay a lo sumo más de un objeto, entonces tendríamos que en las casillas hay acomodados a lo más n objetos, lo que es una contradicción si consideramos que se han repartido n+1 objetos.
En la mayoría de las veces este resultado ayuda a resolver problemas de existencia, de garantizar si dentro de una serie de hechos (finitos e infinitos) estamos convencidos que sucede alguna situación especial.
Reconocer cómo y cuándo deberá usarse el principio requiere de cierta práctica. Detectar quienes serán los objetos y quienes las casillas es la parte central para utilizar el principio.

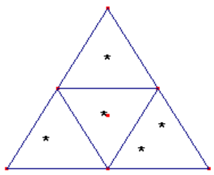
Veamos los siguientes ejemplos:
12-En un grupo de tres personas hay dos del mismo sexo.
13- En un grupo de 13 personas hay dos que nacieron el mismo mes.
14-En un grupo de 366 personas hay dos que tienen el mismo día de cumpleaños.
En los tres casos anteriores los objetos son las personas y las casillas, evidentemente son: los dos sexos, los doce meses del año y los 365 días del año respectivamente.

15-Una línea no puede cortar internamente a los tres lados de un triángulo.
Este ejemplo es el primero donde hay una primera dificultad: debemos decir quiénes son los objetos y quienes las casillas. Las casillas son los dos semiplanos que determina la línea, los objetos serán los vértices del triángulo. Debemos darnos cuenta que, si dos vértices del triángulo se encuentran en uno de los semiplanos, el segmento (lado del triángulo) que ellos determinan no será cortado por la línea.



-Si la línea no pasa por alguno de los vértices, entonces, por el Principio de las casillas hay dos puntos en alguno de los semiplanos (quizás los tres), luego alguno de los lados no será cortado por la línea. Si la línea pasa por alguno de los vértices, ésta podrá cortar a los sumo a uno de los lados.

16- De cinco puntos dentro o sobre los lados de un triángulo equilátero de lado 2 hay dos cuya distancia entre ellos es menor o igual a 1.
Aquí la situación es otra, ¡hay que crear las casillas!, los objetos son los cinco puntos y buscamos dos de ellos a una distancia menor o igual que uno. Si dividimos en casillas, de manera que dos en una casilla garanticen que su distancia es menor o igual que uno entonces terminamos. Esto sugiere que debemos crear 4 casillas, al dividir los lados del triángulo con sus puntos medios y al unir éstos con segmentos de línea se forman cuatro triángulos congruentes de lado 1.



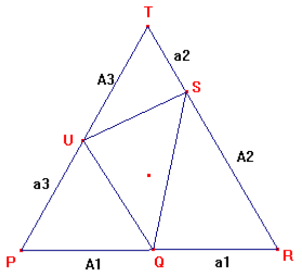
por el Principio de las casillas, de los cinco puntos dados, hay dos puntos en alguno de los triángulos pequeños, estos puntos son los buscados.

Hasta aquí los ejemplos, a continuación se proponen problemas diversos que contribuyan a adquirir habilidad en el uso del Principio de las casillas.

FIGURAS Y DIAGRAMAS

Hace aproximadamente 10 años se propuso en la Olimpíada Bolivariana (2000) el siguiente dúo de problemas que en la actualidad sirven para ilustrar lo útil de una de las estrategias importantes en la resolución de problemas: "figuras y diagramas".
Veamos:
(OBM) 2000)
17- Sean $a_1, A_1, a_2, A_2, a_3, A_3$ números reales positivos tales que $a_i + A_i = k$ (k: constante dada).
a) Demostrar que $a_1 \cdot A_2 + a_2 \cdot A_3 + a_3 \cdot A_1 < k^2$
b) Sean $a_1, A_1, a_2, A_2, a_3, A_3, a_4 A_4$ números reales positivos tales que $a_i + A_i = k$ (k: constante dada). Si $a_i \geq A_i$, demostrar que:
$a_1 \cdot A_2 + a_2 \cdot A_3 + a_3 \cdot A_4 + a_4 A_1 \leq k^2$, y determinar cuándo se tiene la igualdad.

S/ Cada una de las cantidades que aparece en esta desigualdad puede interpretarse geométricamente como la longitud de un segmento, y los productos de dos cantidades como áreas. La igualdades $a_i + A_i = k$ pueden representarse mediante un segmento de longitud k dividido en dos partes de longitudes a_i y A_i. Con estos segmentos se puede construir un triángulo equilátero como se muestra en la figura:



El producto $a_i \cdot A_i$ está relacionado con el área (QRS), en este caso $(QRS) = a_1 A_2 \frac{\sqrt{3}}{4}$. De manera análoga $(STU) = a_2 A_3 \frac{\sqrt{3}}{4}$ y $(UPQ) = a_3 A_1 \frac{\sqrt{3}}{4}$

De lo anterior obtenemos:
(QRS) + (STU) + (UPQ) < (PRT)

Bastaría multiplicar por $\frac{4}{\sqrt{3}}$ para obtener lo pedido en a)

b) Para esta parte basta dibujar un cuadrado de lado k y dentro del mismo cuatro rectángulos correspondientes a los productos del miembro izquierdo de la desigualdad.

18- (OBM) 2000

Sea un entero positivo n par. Halle todas las ternas de números reales (x,y,z) tales que:

$$X^n y + y^n z + z^n x = xy^n + yz^n + zx^n$$

S/

La expresión $X^n y + y^n z + z^n x = xy^n + yz^n + zx^n$ es equivalente a

$$X^n(y - z) + y^n z = xy^n + z^n(y - z)$$

Restando y^{n+1} a ambos miembros resulta:

$$X^n(y - z) + y^n (z - y) = (x - y)y^n + z^n(y - x)$$

o bien:

$$(y^n - x^n) (z - y)= (z^n - y^n) (y - x)\text{........(1)}$$

De lo anterior podemos concluir que si dos de las tres cantidades x, y, z
son iguales entonces la tercera también debe serlo, esto quiere decir que las ternas (x;y;z) cumplen la condición. Para las ternas con las tres componentes distintas, luego de dividir ambos miembros de (1) entre $(z - y)(y - x)$ resulta:

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = \frac{y^n - z^n}{y - z} \text{............................(2)}$$

Esta ecuación (2) se puede interpretar como una igualdad entre la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(x;x^n)$ y $(y;y^n)$ y la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(y;y^n)$ y $(z;z^n)$, en otras palabras, la condición es equivalente a que los tres puntos $(x;x^n)$, $(y;y^n)$ y $(z;z^n)$ sean colineales.

Observemos que como n es par la función $f(x)=x^n$ es convexa y por lo tanto no puede tener tres puntos diferentes alineados.