

## Colección 1

1. Halla la solución de la siguiente ecuación, para  $0 < x \leq 2\pi$ ,

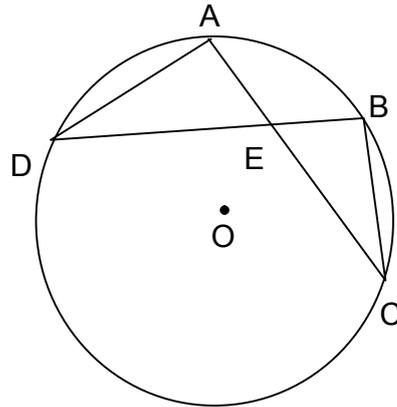
$$\cos^3 x + \cos 2x - \sin^2 x - \cos x - 1 = 0.$$

2. Dada la circunferencia de centro O y radio  $\overline{OA}$ , donde las cuerdas  $\overline{AC}$  y  $\overline{BD}$  se cortan en el punto E.

- a) Prueba que  $\triangle ADE \sim \triangle BEC$ .  
 b) Si se conoce además que

- $\overline{OA} = 2\sqrt{3} \text{ dm}$ ,
- $\angle AOB = 60^\circ$ ,
- $\overline{BC} = \overline{OC}$ ,
- $\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = 1$  y
- $\overline{DE} = 4 \text{ dm}$ ,

calcula el área del triángulo BEC.



3. En el curso 2004 – 2005, de los alumnos egresados de la Universidad de La Habana, 305 correspondieron a las carreras, Ciencias Empresariales, Biología y Derecho; los cuales recibieron su posterior ubicación laboral. El total de los graduados de Derecho coincide con el triple de ubicados de Biología aumentado en 22. El 20% de los ubicados entre Ciencias Empresariales y Derecho excede en 7 al total de los ubicados de Biología. ¿Cuántos egresados fueron ubicados por cada carrera?

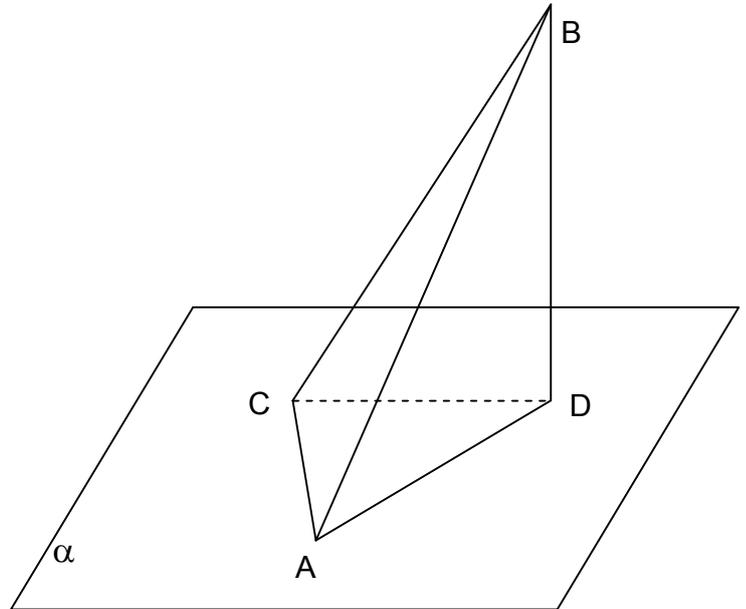
4. Dada la función f, cuya ecuación es:  $f(x) = \log \left( \frac{x^2 - 36}{48 + 22x - 5x^2} \right)$ .

- a) Halla los valores reales de x para los cuales la función f está definida.  
 b) Determina los ceros de la función.

5. El triángulo ADC es la proyección sobre el plano  $\alpha$  del triángulo ABC rectángulo en C.

a) Prueba que el triángulo ADC es rectángulo.

b) Si el perímetro del triángulo ABC es de  $20(2 + \sqrt{2})$  cm y se conoce además que los ángulos  $\angle BAC = 45^\circ$  y  $\angle BAD = 30^\circ$ , calcula el volumen de la pirámide ADCB.



## Respuestas

### PREGUNTA 1

$$\cos^3 x + \cos 2x - \sin^2 x - \cos x - 1 = 0$$

$$\cos^3 x + \cos^2 x - \sin^2 x - \sin^2 x - \cos x - 1 = 0$$

$$\cos^3 x + \cos^2 x - 2\sin^2 x - \cos x - 1 = 0$$

$$\cos^3 x + \cos^2 x - 2(1 - \cos^2 x) - \cos x - 1 = 0$$

$$\cos^3 x + 3\cos^2 x - \cos x - 3 = 0$$

$$\cos^2 x (\cos x + 3) - (\cos x + 3) = 0 \quad (\text{o} \quad \cos x(\cos^2 x - 1) + 3(\cos^2 x - 1) = 0)$$

$$(\text{o} \quad (\cos x - 1)(\cos^2 x + 4\cos x + 3) = 0)$$

$$(\cos x + 3)(\cos^2 x - 1) = 0$$

$$(\cos x + 3)(\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$$

$$\cos x = -3 \quad \cos x = 1 \quad \cos x = -1$$

$$\text{N.S.} \quad x = 0, x = 2\pi \quad x = \pi$$

Las soluciones de la ecuación son  $x = \pi$ ,  $x = 2\pi$  o  $S = \{ \pi, 2\pi \}$

## PREGUNTA 2

a) En los triángulos ADE y BEC se tiene que

$\angle ADE = \angle ECB$  por estar inscritos sobre la misma cuerda  $\overline{AB}$  (o  $\angle DAE = \angle EBC$  por estar inscritos sobre la misma cuerda  $\overline{CD}$ )

$\angle AED = \angle BEC$  por ser opuestos por el vértice.

Luego  $\triangle ADE \sim \triangle BEC$  por tener respectivamente iguales dos ángulos.

b) Variante 1

$$A_{\triangle BEC} = \frac{1}{2} \overline{BC} \cdot \overline{CE} \cdot \text{sen} \angle BCE$$

$\angle BCE = 30^\circ$ , por ser ángulo inscrito sobre la cuerda  $\overline{AB}$  del ángulo central

$$\angle AOB = 60^\circ$$

Como  $\overline{BC} = \overline{OC}$  y  $\overline{OC}$  es radio entonces,  $\overline{BC} = 2\sqrt{3}$  dm.

Como los triángulos ADB y BEC son semejantes y  $\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}} = 1$ , entonces los

triángulos son iguales y por tanto  $\overline{CE} = \overline{DE} = 4$  dm.

$$A_{\triangle BEC} = \frac{1}{2} 2\sqrt{3} \text{ dm} \cdot 4,0 \text{ dm} \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{3} \approx 3,46 \text{ dm}^2$$

Variante 2

Como ABCO es un rombo  $\overline{BO} \perp \overline{CA}$  por ser diagonales del rombo, luego  $\overline{BO'}$  es la altura relativa al lado  $\overline{CE}$  del triángulo BEC, con  $O'$  como la intersección de las diagonales  $\overline{BO}$  y  $\overline{CA}$ .

$\overline{BO'} = \sqrt{3}$  dm por ser la mitad de la diagonal  $\overline{BO}$ .

Como los triángulos ADB y BEC son semejantes y  $\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}} = 1$ , entonces los

triángulos son iguales y por tanto  $\overline{CE} = \overline{DE} = 4$  dm.

$$A_{\triangle BEC} = \frac{1}{2} 2\sqrt{3} \text{ dm} \cdot 4,0 \text{ dm} \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{3} \approx 3,46 \text{ dm}^2$$

$$A_{\triangle BEC} = \frac{1}{2} \overline{CE} \cdot \overline{BO'} = \frac{1}{2} \cdot 4,0 \text{ dm} \cdot \sqrt{3} \text{ dm} = 3,46 \text{ dm}^2.$$

## PREGUNTA 3

X, total de alumnos ubicados de Ciencias Empresariales

Y, total de alumnos ubicados de Biología

Z, total de alumnos ubicados de Derecho

$$\begin{cases} X + Y + Z = 305 \\ Z = 3Y + 22 \\ \frac{20}{100}(X + Z) = Y + 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X + Y + Z = 305 \\ Z = 3Y + 22 \\ \frac{1}{5}(X + Z) - Y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X + Y + Z = 305 \\ Z = 3Y + 22 \\ X - 5Y + Z = 35 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X + Y + 3Y + 22 = 305 \\ X - 5Y + 3Y + 22 = 35 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X + 4Y = 283 \\ X - 2Y = 13 \end{cases}$$

$$6Y = 270 \quad Y = 45$$

$$X = 283 - 4(45) \quad X = 103$$

$$Z = 3(45) + 22 \quad Z = 157$$

Respuesta: Fueron ubicados 103 graduados de Ciencias Empresariales, 45 de Biología y 157 de Derechos.

#### PREGUNTA 4

$$a) \frac{x^2 - 36}{48 + 22x - 5x^2} > 0$$

$$\frac{x^2 - 36}{5x^2 - 22x - 48} < 0$$

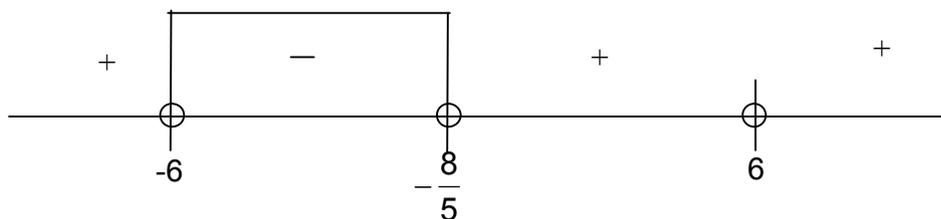
$$\frac{(x-6)(x+6)}{(5x+8)(x-6)} < 0$$

Ceros del numerador

$$x = 6, \quad x = -6$$

Ceros del denominador

$$x = 6, \quad x = -\frac{8}{5}$$



$$f \text{ está definida para } x \in \left( -6, -\frac{8}{5} \right) \quad \text{o} \quad \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -6 < x < -\frac{8}{5} \right\}$$

$$\text{b) } \log \frac{x^2 - 36}{48 + 22x - 5x^2} = 0$$

$$\frac{x^2 - 36}{48 + 22x - 5x^2} = 1$$

$$\frac{x^2 - 36 - 48 - 22x + 5x^2}{48 + 22x - 5x^2} = 0$$

$$\text{o} \quad x^2 - 36 = 48 + 22x - 5x^2$$

$$\frac{6x^2 - 22x - 84}{5x^2 - 22x - 48} = 0$$

$$\text{o} \quad 6x^2 - 22x - 84 = 0$$

$$\frac{3x^2 - 11x - 42}{5x^2 - 22x - 48} = 0$$

$$\text{o} \quad 3x^2 - 11x - 42 = 0$$

$$\frac{(3x+7)(x-6)}{(5x+8)(x-6)} = 0$$

$$\text{o} \quad (3x+7)(x-6) = 0$$

$$x = -\frac{7}{3}$$

$$x = 6$$

Como  $x = -\frac{7}{3}$  pertenece al dominio de la función, entonces es solución de la ecuación.

### PREGUNTA 5

a) Como el triángulo ADC es la proyección sobre el plano  $\alpha$  del triángulo ABC rectángulo en C, entonces  $\overline{BC}$  es la oblicua y  $\overline{DC}$  su proyección.

Como además  $\overline{CA} \perp \overline{BC}$  por ser el triángulo ABC rectángulo en C, entonces  $\overline{BC} \perp \overline{CD}$  pues si  $\overline{CA}$  es perpendicular a la oblicua es perpendicular a la proyección. Luego el triángulo ADC es rectángulo en C.

$$\text{b) } V = \frac{1}{3} A_B \cdot h$$

$$A_B = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{CD}}{2} \quad h = \overline{BD}$$

Como  $\angle BAC = 45^\circ$ , entonces el triángulo ABC es isósceles de base  $\overline{AB}$ .

Luego  $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = 20(2 + \sqrt{2}) \text{ cm}$ .

Si  $\overline{BC} = \overline{AC} = a$ , entonces  $\overline{AB} = \sqrt{2}a^2 = a\sqrt{2}$ ,

Entonces quedaría como

$$2a + a\sqrt{2} = 20(2 + \sqrt{2})$$

$$a(2 + \sqrt{2}) = 20(2 + \sqrt{2})$$

$$a = 20 \text{ cm.}$$

En el triángulo ADB rectángulo en D, se tiene  $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2$   
por tanto que  $\overline{AB} = 20\sqrt{2}$  cm.

En el triángulo ABD rectángulo en D se tiene que,

$$\angle BAD = 30^\circ, \text{ entonces } \overline{BD} = 10\sqrt{2} \text{ cm.}$$

Como el triángulo BDC es rectángulo en D se obtiene,

$$\overline{CD} = \sqrt{20^2 - (10\sqrt{2})^2} = \sqrt{400 - 200} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}.$$

Por tanto  $\overline{CD} = 10\sqrt{2}$  cm.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{20 \text{ cm} \cdot 10\sqrt{2} \text{ cm}}{2} \cdot 10\sqrt{2} \text{ cm} = \frac{1000(\sqrt{2})^2}{3} \text{ cm}^3 \approx 666,7 \text{ cm}^3$$