LA OLIMPIADA BOLIVARIANA DE MATEMATICAS

La Olimpiada Bolivariana es una olimpiada auspiciada por las Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. Se realiza en dos niveles, para los 4 últimos años de la educación secundaria de los países participantes, agrupándolos en dos niveles: intermedio y superior.

Esta olimpiada se desarrolla por correspondencia siendo el modelo a seguir el de la Olimpiada de Matemáticas de la Cuenca del Pacífico (APMO). En junio del año 2000, se ha llevado a cabo la primera edición de esta olimpiada habiendo contado con la participación de los 5 países bolivarianos: Venezuela, Colombia, Ecuador, Perú y Bolivia.

OLIMPIADA BOLIVARIANA DE MATEMATICAS

1º Olimpiada, 2000

I OLIMPIADA BOLIVARIANA DE MATEMATICAS

NIVEL INTERMEDIO

Primer día
8 de Junio, 2000

1. Se seleccionan tres dígitos al azar distintos de 0. Se pega uno de esos dígitos en la frente de Ana, otro de los dígitos en la frente de Baty y el último dígito en la frente de Carolina, de tal modo que ninguna de las niñas puede ver el dígito que ella misma tiene en su frente. Además las niñas están en cubículos con vidrios especiales de tal modo que Ana puede ver a Bety y a Carolina, mientras que Bety sólo puede ver a Carolina y Carolina sólo puede a Bety. El objetivo para cada niña es deducir cuál es el dígito que lleva en la frente. El juez les informa que el número formado por los dígitos que tienen Ana, Bety y Carolina en ese orden es un cuadrado perfecto.
Después de esto Ana dice: "No puedo saber cuál es mi dígito".
En seguida Bety dice: "No puedo saber cuál es mi dígito".
Finalmente, Carolina dice: "Yo si sé cuál es mi dígito".
¿Cuál es el dígito que Carolina tiene en la frente? Explicar.
Después de esto, ¿es posible que Bety sepa cuál es el dígito que tiene en la frente? Explicar.
¿Es posible ahora que Ana sepa cuál es el dígito que tiene en la frente? Justificar su respuesta.

2. Sea ABCD un rectángulo tal que AB = 1cm y BC = 2cm. Sea K el punto medio de AD.

(a) Encontrar la razón en la que se cortan los segmentos BK y AC
(b) Sean L el punto de intersección de AC con BK y M y N los puntos medios de BK y AC, respectivamente. Encontrar el área del triángulo LMN.

3. Un rectángulo ABCD de caucho de *m* x *n* se dobla de modo que AB coincide con DC para obtener un cilindro. Luego se un los extremos de este cilindro para formar una llanta. De este modo la llanta tiene *mn* casillas. Cada una de las casillas de la llanta junto con las cuatro casillas vecinas que comparten un lado con ella forma una figura de cinco casillas, a la que vamos a llamar *cruz*. Encontrar todos los valores de *m* y *n* para los cuales la llanta obtenida se puede recubrir con creuces, de manera tal que todas las casillas estén cubiertas por alguna cruz y no haya dos cruces superpuestas.

Segundo día
09 de Junio, 2000

4. En un torneo de fútbol hay 20 equipos, cada uno de los cuales juega exactamente una vez con cada uno de los demás equipos. En cada partido el ganador obtiene 3 puntos, mientras que el perdedor no obtiene puntos, y en caso de empate cada equipo obtiene 1 punto.

(a) Al final del torneo se suman los puntos obtenidos por todos los equipos. ¿Cuáles son todos los posibles valores de este total?
(b) Al final del torneo el equipo campeón obtuvo P puntos. ¿Cuáles son todos los posibles valores que puede tener P?

Nota: El equipo campeón es aquél que obtuvo el mayor puntaje al final y puede suceder que dos o más equipos obtengan el máximo puntaje.

5. (a) ¿Es posible dividir un triángulo equilátero en 4 triángulos equiláteros?
(b) ¿Es posible dividir un triángulo equilátero en 5 triángulos equiláteros?
(c) Demostrar que cualquier triángulo equilátero se puede dividir en n triángulos equiláteros

6. Encontrar el número de formas de escribir enteros no negativos en cada casilla de un tablero de n x n, de modo que la suma de los números en cada fila y cada columna es igual a 3 y en cada fila y en cada columna sólo puede haber uno o dos números diferentes de cero.

I OLIMPIADA BOLIVARIANA DE MATEMATICAS

NIVEL SUPERIOR

Primer día
8 de Junio, 2000

1. (a) Sea ABCD un rectángulo tal que AB = 1cm y BC = 2cm. Sean K el punto medio de AD, L el punto de intersección de AC con BK y M y N los puntos medios de BK y AC, respectivamente. Encontrar el área del triángulo LMN.

(b) Sea ABCD un rectángulo tal que AB = 1cm y BC = n cm. Sean C'y D' puntos sobre los segmentos BC y AD, respectivamente, de modo que ABC'D' es un cuadrado y E un punto del segmento BC tal que EC = 1cm. Sean L y M los puntos de intersección de

BD' con AC y AE, respectivamente y N el punto de intersección de C'D' y AC. Encontrar el área del triángulo LMN.

2. Un rectángulo ABCD de caucho de m x n se dobla de modo que AB coincide con DC para obtener un cilindro. Luego se un los extremos de este cilindro para formar una llanta. De este modo la llanta tiene mn casillas. Cada una de las casillas de la llanta junto con las cuatro casillas vecinas que comparten un lado con ella forma una figura de cinco casillas, a la que vamos a llamar *cruz*. Encontrar todos los valores de m y n para los cuales la llanta obtenida se puede recubrir con creuces, de manera tal que todas las casillas estén cubiertas por alguna cruz y no haya dos cruces superpuestas.

3. Sea n un entero positivo par. Hallar todas las triplas de números reales (x, y, z) tales que

$$x^n y + y^n z + z^n x = x y^n + y z^n + z x^n$$

Segundo día

09 de Junio, 2000

4. Encontrar todos los enteros positivos a, b, c tales que $ab + bc + ca$ es un número primo y

$$\frac{a+b}{a+c} = \frac{b+c}{b+a}$$

5.

(a) Sean $a_1, A_1, a_2, A_2, a_3, A_3$ números reales positivos tales que $a_i + A_i = k$, donde k es una constante dada. Demostrar que

$$a_1A_2 + a_2A_3 + a_3A_1 < k^2,$$

(b) Sean $a_1, A_1, a_2, A_2, a_3, A_3, a_4, A_4$ números reales positivos tales que $a_i + A_i = k$, donde k es una constante dada. Si $a_i \geq A_i$, demostrar que:

$$a_1A_2 + a_2A_3 + a_3A_4 + a_4A_1 \leq k^2,$$

y determinar cuando se tiene la igualdad.

6. Encontrar el número de formas de escribir enteros no negativos en cada casilla de un tablero de n x n, de modo que la suma de los números en cada fila y cada columna es igual a 3 y en cada fila y en cada columna sólo puede haber uno o dos números diferentes de cero.