XXIX OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase Nacional 1993 (Madrid)

Primera sesión

1.- En una reunión hay 201 personas de 5 nacionalidades diferentes. Se sabe que, en cada grupo de 6, al menos dos tienen la misma edad. Demostrar que hay al menos 5 personas del mismo país, de la misma edad y del mismo sexo.

2.- Escrito el triángulo aritmético:

0		1		2		3		4	....	1991		1992		1993
	1		3		5		7	......	....	....	3983		3985	
		4		8		12	......	......	....	....	....	7968		

....

donde cada número es la suma de los dos que tiene encima (cada fila tiene un número menos y en la última sólo hay un número). Razonar que el último número es múltiplo de 1993.

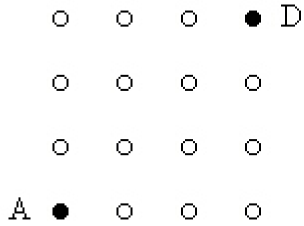
3.- Justificar razonadamente que, en cualquier triángulo, el diámetro de la circunferencia inscrita no es mayor que el radio de la circunferencia circunscrita.

Segunda sesión

4.- Demostrar que para todo número primo p distinto de 2 y de 5, existen infinitos múltiplos de p de la forma 1111......1 (escrito sólo con unos).

5.- Se dan 16 puntos formando una cuadrícula como en la figura:

De ellos se han destacado A y D. Se pide fijar de todos los modos posibles otros dos puntos B y C con la condición de que las seis distancias determinadas por los cuatro puntos sean distintas. En ese conjunto de cuaternas, estudiar:

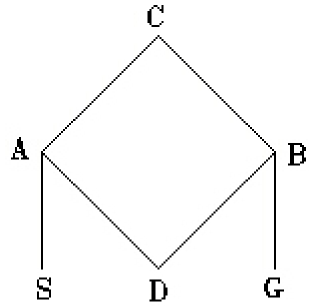


a) Cuántas figuras de 4 puntos existen con las condiciones del enunciado.
b) Cuántas de ellas son geométricamente distintas, es decir, no deducibles unas de otras por transformaciones de igualdad.
c) Si cada punto se designa por un par de enteros (X_i, Y_i), razonar que la suma:

$$|X_i - X_j| + |Y_i - Y_j|$$

Extendida a los seis pares AB, AC, AD, BC, BD, CD es constante.

6.- Una máquina de juego de un casino tiene una pantalla en la que se ofrece un esquema como el de la figura. Para comenzar el juego aparece una bola en el punto S. A cada impulso que recibe del jugador, esa bola se mueve hasta una de las letras inmediatas con la misma probabilidad para cada una de ellas. La partida termina al ocurrir el primero de los dos hechos siguientes:



a) La bola vuelve a S y entonces el jugador pierde.

b) La bola llega a G y entonces el jugador gana.

Se pide la probabilidad de que el jugador gane y la duración media de las partidas.

XXX OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase Nacional 1994 (Madrid)
Primera sesión

1.- Demostrar que si entre los infinitos términos de una progresión aritmética de números enteros positivos hay un cuadrado perfecto, entonces infinitos términos de la progresión son cuadrados perfectos.

2.- Sea OXYZ un triedro trirectángulo de vértice O y aristas X, Y, Z. Sobre la arista Z se toma un punto fijo C, tal que OC = c. Sobre X e Y se toman respectivamente dos puntos variables P y Q de modo que la suma OP + OQ sea una constante dada k. Para cada par de puntos P y Q, los cuatro puntos O, C, P, Q están en una esfera, cuyo centro W se proyecta sobre el plano OXY. Razonar cuál es el lugar geométrico de esa proyección. Razonar también cuál es el lugar geométrico de W.

3.- Una oficina de Turismo va a realizar una encuesta sobre número de días soleados y número de días lluviosos que se dan en el año. Para ello recurre a seis regiones que le transmiten los datos de la siguiente tabla:

Región	Soleados o lluviosos	Inclasificables
A	336	29
B	321	44
C	335	30
D	343	22
E	329	36
F	330	35

La persona encargada de la encuesta no es imparcial y tiene esos datos más detallados. Se da cuenta de que, prescindiendo de una de las regiones, la observación da un número de días lluviosos que es la tercera parte del de días soleados. Razonar cuál es la región de la que prescindirá.

Segunda sesión

4.- El ángulo A del triángulo isósceles ABC mide 2/5 de recto, siendo iguales sus ángulos B y C. La bisectriz de su ángulo C corta al lado opuesto en el punto D. Calcular las medidas de los ángulos del triángulo BCD. Expresar la medida a del lado BC en función de la medida b del lado AC, sin que en la expresión aparezcan razones trigonométricas.

5.- Con 21 fichas de damas, unas blancas y otras negras, se forma un rectángulo de 3x7. Demostrar que siempre hay cuatro fichas del mismo color situadas en los vértices de un rectángulo.

6.- Un polígono convexo de n lados se descompone en m triángulos, con los interiores disjuntos, de modo que cada lado de esos m triángulos lo es también de otro triángulo contíguo o del polígono dado. Probar que m + n es par. Conocidos n y m hallar el número de lados distintos que quedan en el interior del polígono y el número de vértices distintos que quedan en ese interior.

XXXI OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase nacional 1995 (Castellón)

Primera sesión

1.- Se consideran conjuntos A de cien números naturales distintos, que tengan la propiedad de que si a, b y c son elementos cualesquiera de A (iguales o distintos), existe un triángulo no obtusángulo cuyos lados miden a, b y c unidades.
Se denomina S(A) a la suma de los perímetros considerados en la definición de A.
Calcula el valor mínimo de S(A)

2.- Recortamos varios círculos de papel (no necesariamente iguales) y los extendemos sobre una mesa de modo que haya algunos solapados (con parte interior común), pero de tal forma que no haya ningún círculo dentro de otro.
Prueba que es imposible ensamblar las piezas que resultan de recortar las partes no solapadas y componer con ellas círculos distintos.

3.- Por el baricentro G de un triángulo ABC se traza una recta que corta al lado AB en P y al lado AC en Q. Demuestra que:

$$\frac{PB}{PA} \cdot \frac{QC}{QA} \leq \frac{1}{4}$$

Segunda sesión

4.- Siendo p un número primo, halla las soluciones enteras de la ecuación:

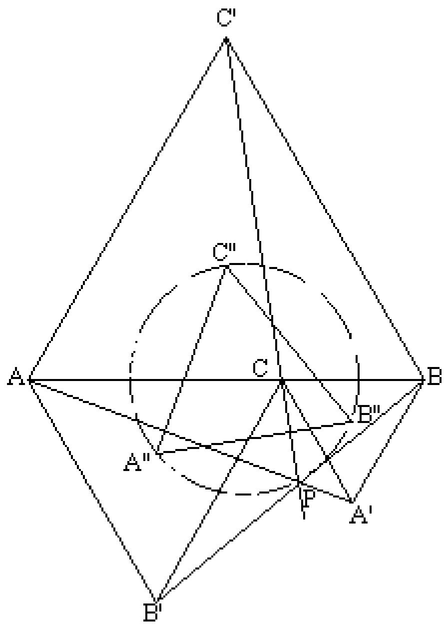
$$p.(x + y) = x.y$$

5.- Demuestra que en el caso de que las ecuaciones:

$$x^3 + mx - n = 0$$

$$nx^3 - 2\,m^2 x^2 - 5mnx - 2m^3 - n^2 = 0 \text{ (n no nulo)}$$

tengan una raíz común, la primera tendrá dos raíces iguales y determina entonces las raíces de las dos ecuaciones en función de n.



6.- En la figura, AB es un segmento fijo y C un punto variable dentro de él. Se construyen triángulos equiláteros de lados AC y CB, ACB' y CBA' en el mismo semiplano definido por AB, y otro de lado AB, ABC' en el semiplano opuesto. Demuestra:

a) Las rectas AA', BB' y CC' son concurrentes.

b) Si llamamos P al punto común a las tres rectas del apartado a), hallar el lugar geométrico de P cuando C varía en el segmento AB.

c) Los centros A'', B'' y C'' de los tres triángulos forman un triángulo equilátero.

d) Los puntos A'', B'', C'' y P están sobre una circunferencia.

XXXII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase nacional 1996 (Tarragona)
Primera sesión

- 1.- Los números naturales a y b son tales que:

$$\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}$$

es entero. Demostrar que el máximo común divisor de a y b no es mayor que $\sqrt{a+b}$

- 2.- Sea G el baricentro del triángulo ABC. Si se verifica

$$AB+GC=AC+GB$$

demostrar que el triángulo es isósceles.

- 3.- Sean a, b ,c números reales. Se consideran las funciones

$$f(x)=ax^2+bx+c, \qquad g(x)=cx^2+bx+a.$$

Sabiendo que

$$|f(-1)|\leq 1, \quad |f(0)|\leq 1, \quad |f(1)|\leq 1,$$

demostrar que si -1 < = x < = 1, entonces:

$$|f(x)|\leq \frac{5}{4} \qquad y \qquad |g(x)|\leq 2$$

Segunda sesión

- 4.- Discutir la existencia de soluciones de la ecuación

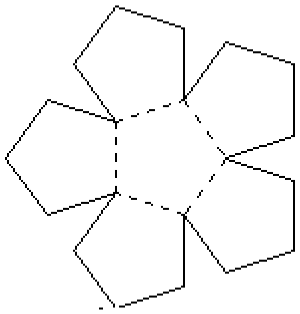
$$\sqrt{x^2-p}+2\sqrt{x^2-1}=x$$

según los valores del parámetro real p, y resolverla siempre que sea posible.

- 5.- En Port Aventura hay 16 agentes secretos. Cada uno de ellos vigila a algunos de sus colegas. Se sabe que si el agente A vigila al agente B, entonces B no vigila a A.

Además, 10 agentes cualesquiera pueden ser numerados de forma que el primero vigila al segundo, éste vigila al tercero,....., el último (décimo) vigila al primero.

Demostrar que también se pueden numerar de este modo 11 agentes cualesquiera.



6.- La figura de la izquierda se compone de seis pentágonos regulares de lado 1m. Se dobla por las líneas de puntos hasta que coincidan las aristas no punteadas que confluyen en cada vértice.

¿Qué volumen de agua cabe en el recipiente formado?.

XXXIII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase nacional 1997 (Valencia)
Primera sesión

1.- Calcular la suma de los cuadrados de los cien primeros términos de una progresión aritmética, sabiendo que la suma de ellos vale -1, y que la suma de los términos de lugar par vale +1.

2.- Un cuadrado de lado 5 se divide en 25 cuadrados unidad por rectas paralelas a los lados. Sea A el conjunto de los 16 puntos interiores, que son vértices de los cuadrados unidad, pero que no están en los lados del cuadrado inicial.

¿Cuál es el mayor número de puntos de A que es posible elegir de manera que TRES cualesquiera de ellos NO sean vértices de un triángulo rectángulo isósceles?.

3.- Se consideran las parábolas $y = x^2 + px + q$ que cortan a los ejes de coordenadas en tres puntos distintos por los que se traza una circunferencia. Demostrar que todas las circunferencias trazadas al variar p y q en **R** pasan por un punto fijo que se determinará.

Segunda sesión

4.- Sea p un número primo. Determinar todos los enteros $k \in \mathbb{Z}$ tales que $\sqrt{k^2 - kp}$ es natural.

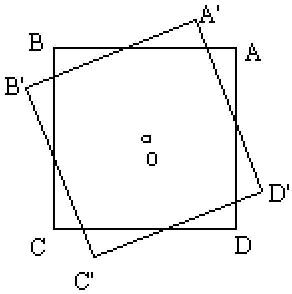
5.- Demostrar que en un cuadrilátero convexo de área unidad, la suma de las longitudes de todos los lados y diagonales no es menor que $2\left(2+\sqrt{2}\right)$.

6.- Un coche tiene que dar una vuelta a un circuito circular. En el circuito hay n depósitos con cierta cantidad de gasolina. Entre todos los depósitos contienen la cantidad exacta que el coche necesita para dar una vuelta. El coche comienza con el depósito vacío. Demostrar que con independencia del número, posición y cantidad de combustible de cada depósito, siempre se puede elegir un punto de comienzo que le permita completar la vuelta.

Notas: a) El consumo es uniforme y proporcional a la distancia recorrida. b) El tamaño del depósito es suficiente para albergar toda la gasolina necesaria para dar una vuelta.

XXXIV OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase nacional 1998 (Tarazona)
Primera sesión



1.- Un cuadrado ABCD de centro O y lado 1, gira un ángulo α en torno a O. Hallar el área común a ambos cuadrados.

2.- Hallar todos los números naturales de 4 cifras, escritos en base 10, que sean iguales al cubo de la suma de sus cifras.

3.- Se considera el triángulo ABC y su circunferencia circunscrita. Si D y E son puntos sobre el lado BC tales que AD y AE son, respectivamente, paralelas a las tangentes en C y en B a la circunferencia circunscrita, demostrar que:

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}$$

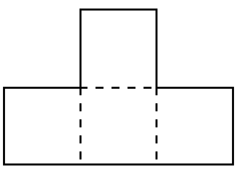
Segunda sesión

4.- Hallar las tangentes de los ángulos de un triángulo sabiendo que son números enteros positivos.

5.- Hallar todas las funciones $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente crecientes y tales que:

$$f(n + f(n)) = 2\, f(n)$$

para n = 1, 2, 3, ...



6.- Determina los valores de n para los que es posible construir un cuadrado de n x n ensamblando piezas del tipo:

XXXV OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase nacional 1999 (Granada)
Primera sesión

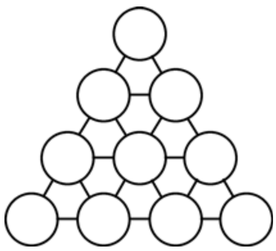
1.- Las rectas t y t', tangentes a la parábola de ecuación $y = x^2$ en los puntos A y B, se cortan en el punto C.
La mediana del triángulo $\triangle ABC$ correspondiente al vértice C tiene longitud m.
Determinar el área del triángulo $\triangle ABC$ en función de m.

2.- Probar que existe una sucesión de enteros positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ tal que

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots\ldots + a_n^2$$

es un cuadrado perfecto para todo entero positivo n.

3.- Sobre un tablero en forma de triángulo equilátero como se indica en la figura; se juega un solitario.
Sobre cada casilla se coloca una ficha. Cada ficha es blanca por un lado, y negra por el otro. Inicialmente, sólo una ficha, que está situada en un vértice, tiene la cara negra hacia arriba; el resto de las fichas tiene la cara blanca hacia arriba. En cada movimiento se retira sólo una ficha negra del tablero y se da la vuelta a cada una de las fichas que ocupan una casilla vecina. Casillas vecinas son las que están unidas por un segmento. Después de varios movimientos ¿será posible quitar todas las fichas del tablero?



Segunda sesión

4.-. Una caja contiene 900 tarjetas, numeradas del 100 al 999. Se sacan al azar (sin reposición) tarjetas de la caja y se anota la suma de los dígitos de cada tarjeta extraída. ¿Cuál es la menor cantidad de tarjetas que se deben sacar, para garantizar que al menos tres de esas sumas sean iguales?

5.- El baricentro del triángulo ΔABC es G. Denotamos por $g_a,\ g_b,\ g_c$ las distancias desde G a los lados a, b y c respectivamente.
Sea r el radio de la circunferencia inscrita. Probar que

:i) $g_a \geq \frac{2r}{3},\ g_b \geq \frac{2r}{3},\ g_c \geq \frac{2r}{3}$

ii) $\frac{g_a + g_b + g_c}{r} \geq 3$

6.- Se divide el plano en un número finito de regiones N mediante tres familias de rectas paralelas. No hay tres rectas que pasen por un mismo punto.

¿Cuál es el mínimo número de rectas necesarias para que N>1999?

XXXVI OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

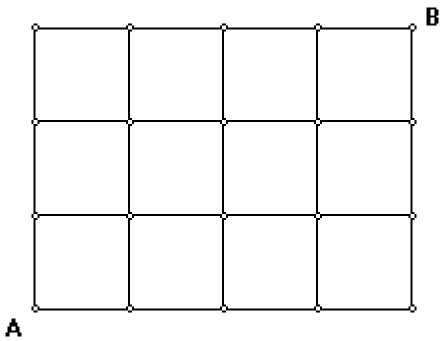
Fase nacional 2000 (Palma de Mallorca)
Primera sesión

1.- Sean los polinomios:

$$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1;$$
$$Q(x) = x^4 + cx^3 + bx^2 + ax + 1.$$

Halla las condiciones que deben cumplir los parámetros reales a, b y c (a distinto de c) para que P(x) y Q(x) tengan dos raíces comunes y resuelve en ese caso las ecuaciones $P(x) = 0$; $Q(x) = 0$.

2.- La figura muestra un plano con calles que delimitan 12 manzanas cuadradas.



Una persona P va desde A hasta B y otra Q desde B hasta A. Ambas parten a la vez siguiendo caminos de longitud mínima con la misma velocidad constante. En cada punto con dos posibles direcciones a tomar, ambas tienen la misma probabilidad. Halla la probabilidad de que se crucen.

3.- Dos circunferencias secantes C_1 y C_2 de radios r_1 y r_2 se cortan en los puntos A y B.
Por B se traza una recta variable que corta de nuevo a C_1 y C_2 en dos puntos que llamaremos P_r y Q_r respectivamente.

Demuestra la siguiente propiedad: Existe un punto M, que depende sólo de C_1 y C_2, tal que la mediatriz del segmento P_rQ_r pasa por M.

Segunda sesión

4.- Encuentra el mayor número entero N que cumpla las siguientes condiciones :

a) $E\left[\frac{N}{3}\right]$ tiene sus tres cifras iguales.

b) $E\left[\frac{N}{3}\right]$ es suma de números naturales consecutivos comenzando en 1, es decir, existe un natural n tal que:

$$E\left[\frac{N}{3}\right] = 1 + 2 + \ldots\ldots + (n-1) + n$$

Nota: $E[x]$ es la parte entera de x.

5.- Tomemos cuatro puntos situados en el interior o el borde de un cuadrado de lado 1. Demuestra que al menos dos de ellos están a distancia menor o igual que 1.

6.- Demuestra que no existe ninguna función $f : N \to N$ que cumpla: f(f(n)) =n+1.

XXXVII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase nacional 2001 (Murcia)
Primera sesión

1.- Probar que la gráfica del polinomio $P(x)$ es simétrica respecto del punto $A(a, b)$ si y sólo si existe un polinomio $Q(x)$ tal que:

$$P(x) = b + (x - a)Q((x-a)^2)$$

2.- Sea P un punto en el interior del triángulo ABC, de modo que el triángulo ABP verifica:

$$AP = BP$$

Sobre cada uno de los otros dos lados de ABC se construyen exteriormente triángulos BQC y CRA, ambos semejantes al triángulo ABP cumpliendo:

$$BQ = QC \text{ y } CR = RA$$

Probar que los puntos P, Q, C y R o están alineados o son los vértices de un paralelogramo.

3.- Se tienen cinco segmentos de longitudes a_1, a_2, a_3, a_4 y a_5 tales que con tres cualesquiera de ellos es posible construir un triángulo.
Demostrar que al menos uno de esos triángulos tiene todos sus ángulos agudos.

Segunda sesión

4.- Los números enteros desde 1 hasta 9 se distribuyen en las casillas de una tabla 3x3.
Después se suman seis números de tres cifras: los tres que se leen en filas de izquierda a derecha y los tres que se leen en columnas de arriba abajo.
¿Hay alguna distribución para la cual el valor de esa suma sea 2001?

5.- *ABCD* es un cuadrilátero inscrito en una circunferencia de radio 1 de modo que *AB* es un diámetro y el cuadrilátero admite circunferencia inscrita.

Probar que: $CD \leq 2\sqrt{5} - 4$.

6.- Determinar la función $f : N \to N$ (siendo $N = \{1,2,3,...\}$ el conjunto de los números naturales) que cumple, para cualesquiera s, $n \in N$, las siguientes condiciones:

$f(1) = f(2^s) = 1$ y si $n < 2^s$, entonces $f(2^s + n) = f(n) + 1$.

Calcular el valor máximo de $f(n)$ cuando $n \leq 2001$.

Hallar el menor número natural n tal que $f(n) = 2001$.

XXXVIII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase nacional 2002 (La Rioja)
Primera sesión (5 de abril)

1.- Hallar todos los polinomios $P(t)$ de una variable, que cumplen:

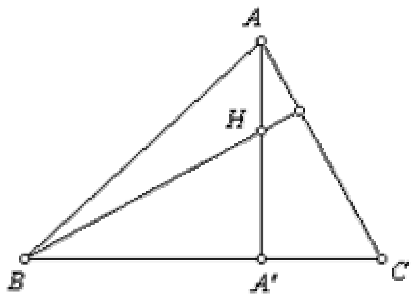
$$P(x^2 - y^2) = P(x + y)\cdot P(x - y)$$

para todos los números reales x e y.

2.-En un triángulo ABC, A' es el pie de la altura relativa al vértice A y H el ortocentro.

a)Dado un número real positivo k tal que , encontrar la relación entre los ángulos B y C en función de k.

b) Si B y C son fijos, hallar el lugar geométrico del vértice A para cada valor de k.



3.-La función g se define sobre los números naturales y satisface las condiciones:

1. $\bullet g(2) = 1$
2. $\bullet g(2n) = g(n)$
3. $\bullet g(2n + 1) = g(2n) + 1$

Sea n un número natural tal que $1 \leq n \leq 2002$. Calcula el valor máximo M de $g(n)$. Calcula también cuántos valores de n satisfacen $g(n) = M$.

Segunda sesión (6 de abril)

4.-Sea n un número natural y m el que resulta al escribir en orden inverso las cifras de n. Determinar, si existen, los números de tres cifras que cumplen $2m + S = n$, siendo S la suma de las cifras de n.

5.-Se consideran 2002 segmentos en el plano tales que la suma de sus longitudes es la unidad. Probar que existe una recta *r* tal que la suma de las longitudes de las proyecciones de los 2002 segmentos dados sobre *r* es menor que .

6.-En un polígono regular *H* de lados (*n* entero positivo), *R* vértices se pintan de rojo y el resto de azul. Demostrar que el número de triángulos isósceles que tienen sus tres vértices del mismo color no depende del modo de distribuir los colores en los vértices de *H*.

XXXIX OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase nacional 2003 (Canarias)
Primera sesión (3 de marzo)

1.- Probar que para cualquier primo p distinto de 2 y 5 existe un múltiplo de p cuyas cifras son todas nueves. Por ejemplo si $p = 13$, $999999 = 13\cdot 76923$

2.-¿Existe algún conjunto finito de números reales M que contenga al menos dos elementos distintos y que cumpla la propiedad de que para dos números a, b cualesquiera de M, el número $2a - b^2$ sea también un elemento de M?

3.- Las alturas del triángulo ABC se cortan en el punto H. Se sabe que $AB = CH$. Determinar el valor del ángulo BCA

Segunda sesión (4 de marzo)

4.-Sea x un número real tal que $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$. Demostrar que tanto x como x^2 son irracionales.

5.- ¿Cuáles son las posibles áreas de un hexágono con todos los ángulos iguales y cuyos lados miden 1, 2, 3, 4, 5 y 6 en algún orden?

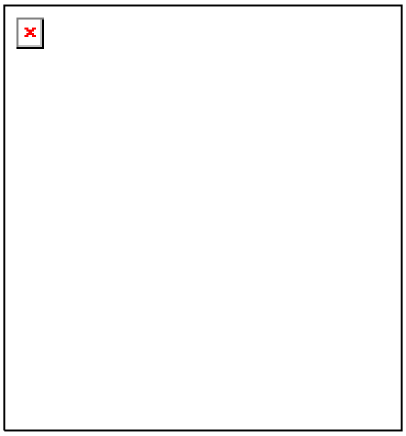
6.- Ensartamos $2n$ bolas blancas y $2n$ bolas negras formando una cadena abierta. Demuestra que, se haga en el orden que se haga, siempre es posible cortar un segmento de cadena exactamente con n bolas blancas y n bolas negras.

XL OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Fase nacional 2004 (Ciudad Real)
Primera sesión (26 de marzo)

1.- Tenemos un conjunto de 221 números reales cuya suma es 110721. Los disponemos formando una tabla rectangular de modo que todas las filas y la primera y última columnas son progresiones aritméticas de más de un elemento. Probar que la suma de los elementos de las cuatro esquinas vale 2004

2.- *ABCD* es un cuadrilátero cualquiera, *P* y *Q* los puntos medios de las diagonales *BD* y *AC* respectivamente. Las paralelas por *P* y *Q* a la otra diagonal se cortan en *O*. Si unimos *O* con las cuatro puntos medios de los lados *X, Y, Z* y *T* se forman cuatro cuadriláteros, *OXBY*, *OYCZ*, *OZDT* y *OTAX*.
Probar que los cuatro cuadriláteros tienen la misma área.



1. •
2. •

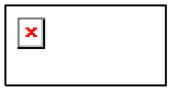
3.- Se representa por Z el conjunto de todos los enteros. Hallar todas las funciones $f: Z \to Z$ tales que para cualesquiera x, y enteros se verifica:

$$f(x + f(y)) = f(x) - y$$

Segunda sesión (27 de marzo)

3. 4.- ¿Existe alguna potencia de 2 que al escribirla en el sistema decimal tenga todos sus dígitos distintos de cero y sea posible reordenar los mismos para formar con ellos otra potencia de 2?. Justificar la respuesta.

5.- Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que, en el triángulo *ABC*, la mediana desde *B* sea dividida en tras partes iguales por la circunferencia inscrita en el triángulo, es



6.- Colocamos, formando una circunferencia, 2004 fichas bicolores: blancas por una cara y negras por la otra. Un movimiento consiste en elegir una ficha con la cara **negra** hacia arriba, y dar la vuelta a tres fichas: la elegida, la de su derecha y la de su izquierda. Supongamos que inicialmente hay una sola ficha con la cara negra hacia arriba. ¿Será posible, repitiendo el movimiento descrito, conseguir que todas las fichas tengan la cara blanca hacia arriba? ¿Y si tuviéramos 2003 fichas, entre las cuales exactamente una tiene al comienzo la cara negra hacia arriba?