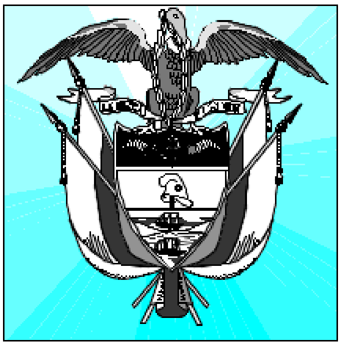
LA OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMATICAS

Las Olimpiadas Iberoamericanas de Matemáticas son, como su nombre lo indica, una competencia regional de matemáticas para todos los países iberoamericanos. Más específicamente, en esta Olimpiada pueden participar todos los países que hablan español y portugués en Sur América, América Central, además de México, España y Portugal. En total son 22 los países iberoamericanos (Esta es la Olimpiada regional que congrega a mas países después de la Olimpiada Internacional) y todos ellos han participado al menos en una edición de esta olimpiada.

Comenzó a fines del año 1985, en Colombia. La segunda Olimpiada se llevó a cabo en 1987 en Uruguay, y desde entonces se realizan todos los años. La entidad encargada de su realización es La Organización Iberoamericana de estados, con sede en España, quien coordina los detalles de cada evento con el país anfitrión. La Olimpiada Iberoamericana rápidamente se ha constituido en la mayoría de los países como un estímulo para el desarrollo de el conocimiento de las matemáticas entre alumnos de instrucción secundaria, y ha originado que muchos de estos países hayan implantado Olimpiadas Nacionales de Matemáticas, en las cuales se les premia a los ganadores con el derecho a representar a su país en las Olimpiada Iberoamericana.

En forma similar a la Olimpiada Internacional, el evento contempla dos pruebas de tres preguntas cada una con una duración de 4 horas y media. En las primeras diez ediciones el puntaje acumulado por problema era de un máximo de 10 puntos. Desde la undécima Olimpiada, la puntuación ha sido de un máximo de 7 puntos por problema.

Para muchos de los amantes de las Matemáticas, solucionar estos problemas constituye un desafío.



LA OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMATICAS

1º Olimpiada, Villa de Leyva, Colombia, 1985
2º Olimpiada, Salto, Uruguay, 1987
3º Olimpiada, Lima, Perú, 1988
4º Olimpiada, La Habana, Cuba, 1989
5º Olimpiada, Valladolid, España, 1990
6º Olimpiada, Córdoba, Argentina, 1991
7º Olimpiada, Caracas, Venezuela, 1992
8º Olimpiada, México, México, 1993
9º Olimpiada, Fortaleza, Brasil, 1994
10º Olimpiada, Valparaizo, Chile, 1995
11º Olimpiada, San José, Costa Rica, 1996
12º Olimpiada, Guadalajara, México, 1997
13º Olimpiada, Puerto Plata, Rep. Domin., 1998
14º Olimpiada, La Habana, Cuba, 1999
15º Olimpiada, Caracas, Venezuela, 2000

I OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMATICAS

Villa de Leyva, Colombia

Primer Día
12 de Diciembre, 1985

1. Halle todas las ternas de enteros (a,b,c) tales que:

$$a + b + c = 24$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = 210$$
$$abc = 240$$

Fundamente su respuesta.

2. Sea P un punto interior del triángulo equilátero ABC tal que:

$$PA = 5,\ PB = 7,\ \text{y}\ PC = 8$$

Halle la longitud de un lado del triángulo ABC.

3. Halle las raíces r_1, r_2, r_3 y r_4 de la ecuación:

$$4x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + 5 = 0.$$

sabiendo que son reales, positivos y que:

$$\frac{r_1}{2} + \frac{r_2}{4} + \frac{r_3}{5} + \frac{r_4}{8} = 1$$

Segundo Día
13 de Diciembre, 1985

4. Si: $x \neq 1$, $y \neq 1$, $x \neq y$

y: $$\frac{yz - x^2}{1 - x} = \frac{xz - y^2}{1 - y}$$

Demuestre que ambas fracciones son iguales a $x + y + z$

5. A cada entero positivo n se asigna un entero no negativo F(n) de tal manera que se satisfagan las siguientes condiciones:

- (i) $f(rs) = f(r) + f(s)$
- (ii) $f(n) = 0$, siempre que la cifra en las unidades n sea 3.
- (iii) $f(10)$ es cero. Halle $f(1985)$. Justifique su respuesta.

6. Dado un triángulo ABC, se consideran los puntos D, E y F de las rectas BC, AC y AB respectivamente. Si las rectas AD, BE y cf pasan todas por el centro O de la circunferencia al triángulo ABC, cuyo radio es R, demuestre que:

$$\frac{1}{AD} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF} = \frac{2}{R}$$

II OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMATICAS

Salto, Uruguay

Primer Día
28 de Enero, 1987

1. Encontrar las f(x) tales que:

$$[f(x)]^2 \cdot f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 64x$$

para $x \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq -1$

2. En un triángulo ABC, M y N son los puntos medios respectivos de los lados AC y AB, y P el punto medio de intersección de BM y CN. Demuestre que, si es posible inscribir una circunferencia en el cuadrilátero ANPM, entonces el triángulo ABC es isósceles.

3. Pruebe que si m, n, r son enteros positivos, no nulos, y:

$$1 + m + n\sqrt{3} = [2 + \sqrt{3}]^{2r-1}$$

entonces m es un cuadrado perfecto.

Segundo Día
29 de Enero, 1987

4. Se define la sucesión p_n de la siguiente manera: $p_1 = 2$ y para todo n mayor o igual que 2, p_n es el mayor divisor primo de la expresión:

$$p_1\, p_2\, p_3 \ldots p_{n-1} + 1$$

Pruebe que p_n es diferente de 5.

5. Si *r, s* y *t* son las raíces de la ecuación: $x(x-2)(3x-7) = 2$

- a) Demuestre que *r, s* y *t* son positivos.
- b) Calcule: arctan *r* + arctan *s* + arctan *t*.

Nota: Se denota con arctg x, el arco comprendido entre 0 y π cuya tangente es *x*.

6. Sea ABCD un cuadrilátero plano convexo, P y Q son puntos de AD y BC respectivamente Tales que:

$$\frac{AP}{PD} = \frac{AB}{DC} = \frac{BQ}{QC}$$

Demuestre que los ángulos que forma la recta PQ con las rectas AB y DC son iguales.

III OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMATICAS

Lima, Perú

Primer día
27 de Abril, 1988

1. Las medidas de los lados de un triángulo están en progresión aritmética y las longitudes de las alturas del mismo triángulo también están en progresión aritmética. Demuestre que el triángulo es equilátero.

2. Sean a,b,c,d,p y q números naturales no nulos que verifican $ad - bc = 1$, y

$$\frac{a}{b} > \frac{p}{q} > \frac{c}{d}$$

Demostrar que:

- i) $q \geq b + d$
- ii) Si $q = b + d$ entonces $p = a + c$.

3. Demuestre que entre todos los triángulos cuyos vértices distan 3, 5 y 7, de un punto dado P, el que tiene mayor perímetro admite a P como su incentro.

Segundo día
28 de Abril, 1988

4. Sea ABC un triángulo cuyos lados son a, b, c. Se divide cada lado del triángulo en "n" segmentos iguales. Sea S la suma de los cuadrados de las distancias de cada vértice a cada uno de los puntos de división del lado opuesto distintos de los vértices.

Demuestre que: $\dfrac{S}{a^2 + b^2 + c^2}$ es un número racional.

5. Considere las expresiones de la forma $x + yt + zt^2$ con x, y, z números racionales y $t^3=2$.

Demuestre que:
Si $x + yt + zt^2 \neq 0$, entonces existen u, v, w racionales tal que:
$(x + yt + z^2).(u + vt + wt^2)= 1$

6. Considere los conjuntos de n números naturales diferentes de cero en los cuales no hay tres elementos en progresión aritmética.

Demuestre que en uno de esos conjuntos la suma de los inversos de sus elementos es máximo.

IV OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMATICAS

La Habana, Cuba

Primer día
10 de Abril, 1989

1. Determinar todas las ternas de números reales que satisfacen el sistema de ecuaciones siguiente:

$$x + y - z = -1$$
$$x^2 - y^2 + z^2 = 1$$
$$-x^3 + y^3 + z^3 = -1$$

2. Sean x, y, z tres números reales tales que $0 < x < y < z < \pi/2$. Demostrar la desigualdad:

$$\pi/2 + 2\text{Sin } x.\text{Cos } y + 2\text{Sin } y \text{ Cos } z > \text{Sin } 2x + \text{Sin } 2y + \text{Sin } 2z$$

3. Sean *a*, *b* y *c* las longitudes de los lados de un triángulo. Probar que:

$$\left[\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a}\right] < \frac{1}{16}$$

Segundo día
11 de Abril, 1989

4. La circunferencia inscrita en el triángulo ABC, es tangente a los lados AB y AC en los puntos M y N, respectivamente. Las bisectrices de A y B intersecan a MN en los puntos P y Q, respectivamente. Sea O el incentro del triángulo ABC.
Probar que:

$$MP.OA = BC.OQ$$

5. Sea la función f definida sobre el conjunto {1; 2; 3; ... }

- (i) $f(1) = 1$
- (ii) $f(2n + 1) = f(2n) +1$
- (iii) $f(2n) = 3f(n)$

Determinar el conjunto de valores que toma f.

6. Mostrar que hay una infinidad de pares de números naturales que satisfacen la ecuación:

$$2x^2 - 3x - 3y^2$$

V OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMATICAS

Valladolid, España

Primer Día
25 de Setiembre, 1990

1. Sea f una función, definida en el conjunto de los enteros mayores o iguales que cero, que verifica las dos condiciones siguientes:

- (I) Si $n = 2^j -1$, para n = 0, 1, 2, ... , entonces f(n)=0
- (II) Si $n \neq 2^j-1$, para n = 0, 1, 2, ... ,entonces f(n+1) = f(n) -1.
- a) Demostrar que para todo entero n, mayor o igual que cero, existe un entero k, mayor que cero, tal que:

  $f(n) + n = 2^k - 1$

- (b) Calcular $f(2^{1990})$.

2. En un triángulo ABC, sean I el centro de la circunferencia inscrita y D, E y F sus puntos de tangencia con los lados BC, AC y AB, respectivamente. Sea P el otro punto de intersección de la recta AD con la circunferencia inscrita.
Si M es el punto medio de EF, demostrar que los cuatro puntos P, I, M y D pertenecen a una misma circunferencia.

3. Sea $f(x) = (x + b)^2 - c$, un polinomio con b y c números enteros.

- a) Si p es un número primo tal que p divide a c y p^2 no divide a c, demostrar que, cualquiera que sea el número entero n, p^2 no divide a f(n).
- b) Sea q un número primo, distinto de 2, que divide a c. Si q divide a f(n) para algún número entero n, demostrar que para cada entero positivo r existe un número entero n' tal que q^r divide a f(n').

Segundo Día
26 de Setiembre, 1990

4. Sean: C_1 una circunferencia, AB uno de sus diámetros, t su tangente en B y M un punto de C_1 distinto de A.
Se construye una circunferencia C^2 tangente a C^1 en M y a la recta t.

- a) Determinar el punto P de tangencia de t y C_2 y hallar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias al variar M.

- b) Demostrar que existe una circunferencia ortogonal a todas las circunferencias C_2.

NOTA: Dos circunferencias son ortogonales si se cortan y las tangentes respectivas en los puntos de intersección son perpendiculares.

5. Sean A y B vértices opuestos de un tablero cuadriculado de n por n casillas ($n \geq 1$), a cada una de las cuales se añade su diagonal de dirección AB, formándose así $2n^2$ triángulos iguales. Se mueven una ficha recorriendo un camino que va desde A hasta B formado por segmentos del tablero, y se coloca, cada vez que se recorre, una semilla en cada uno de los triángulos que admite ese segmento como lado. El camino se recorre de tal forma que no se pasa por ningún segmento más de una vez, y se observa, después de recorrido, que hay exactamente dos semillas en cada uno de los $2n^2$ triángulos del tablero. ¿Para qué valores de n es posible esta situacióm?

6. Sea f(x) un polinomio de grado 3 con coeficientes racionales. Probar que si el gráfico de f es tangente al eje x, entonces f(x) tiene sus 3 raíces racionales.

VI OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMATICAS

Cordoba, Argentina

Primer Día
Setiembre, 1991

1. A cada vértice de un cubo se asigna el valor de +1 o -1, y a cada cara el producto de los valores asignados a cada vértice. ¿Qué valores puede tomar la suma de los 14 números así obtenidos?

2. Dos rectas perpendiculares dividen un cuadrado en cuatro partes, tres de las cuales tienen cada una área igual a 1. Demostrar que el área del cuadrado es cuatro.

3. Sea F una función creciente definida para todo número real x, $0 \leq x \leq 1$, tal que:

- (a) $F(0) = 0$
- (b) $F(x/3) = F(x)/2$
- (c) $F(1-x) = 1 - F(x)$

Encontrar F(18/1991)

Segundo Día
Setiembre, 1991

4. Encontrar un número N de cinco cifras diferentes y no nulas, que sea igual a la suma de todos los números de tres cifras distintas que se pueden formar con cinco cifras de N. Find N.

5. Sea $P(X,Y) = 2X^2 - 6XY + 5y^2$. Diremos que un número entero A es un valor de P si existen números enteros B y C tales que A = P(B,C).

- i) DEterminar cuántos elementos de {1, 2, 3, ... ,100} son valores de P.
- ii) Probar que el producto de valores de P es un valor de P.

6. Dados 3 puntos no alineados M, N y P, sabemos que M y N son puntos medios de dos lados de un triángulo y que P es el punto de intersección de las alturas de dicho triángulo. Construir el triángulo.

VII OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMATICAS

Caracas, Venezuela

Primer día
Septiembre, 1992

1. Para cada entero positivo *n*, sea a_n el último dígito del número.

$$1+2+3+ ...+n$$

Calcular $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{1992}$.

2. Dadas la colección de *n* números reales positivos

$$a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_n$$

y la función

$$f(x) = \frac{a_1}{x+a_1} + \frac{a_2}{x+a_2} + \cdots + \frac{a_n}{x+a_n}$$

Determinar la suma de las longitudes de los intervalos, disjuntos dos a dos, formados por todos los *x</I< f(x) que tales> = 1.*

3. En un triángulo equilátero ABC cuyo lado tiene longitud 2 se inscribe la circunferencia Γ.

- a) Demostrar que para todo punto de P de Γ, la suma de los cuadrados de sus distancias a los vértices A, B y C es 5.
- b) Demostrar que para todo punto P de Γ es posible construir un triángulo cuyos lados tienen las longitudes de los segmentos AP, BP y CP, y que su área es: $\frac{\sqrt{3}}{4}$

Segundo día
Septiembre, 1992

4. Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones de números enteros que verifican las las siguientes condiciones:

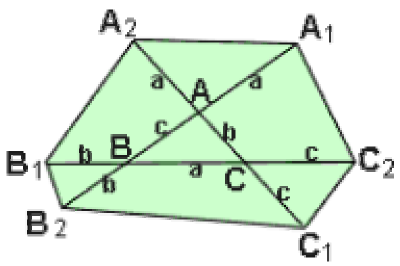
- i) $a_0 = 0$, $b_0 = 8$
- ii) $a_1 = 2$
- iii) a_n es un cuadrado perfecto para todo n.

Determinar al menos dos valores del par (a_{1992}, b_{1992}).

5. Se da la circunferencia Γ y los números positivos h y m de modo que existe un trapecio ABCD inscrito en Γ, de altura h y en el que la suma de las bases AB y CD es m. Construir el trapecio ABCD.

6. A partir del triángulo T de vértices A, B y C se construye el hexágono H de vértices A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 como se muestra en la figura. Demostrar que

Area de H ≥ 13 (Area de T)



PRUEBA DE SELECCIÓN PARA LA DELEGACIÓN PERUANA

VIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

PROBLEMAS

1. Demostrar que dados tres números primos cualesquiera, diferentes entre sí, sus raíces cúbicas no pueden ser términos (no necesariamente consecutivos) de una progresión aritmética.

2. Se tienen 4 canicas de radio 1, colocadas de modo que cada una de ellas es tangente a las otras tres. Determinar el radio de la esfera mas pequeña que contiene a las cuatro canicas.

3. Demostrar la verdad o falsedad de la siguiente proposición:
Si a, b y c son números reales positivos diferentes entre sí, entonces

$$a^a\, b^b\, c^c \geq (abc)^{(a+b+c)/3}$$

4. Asumiendo que la ecuación $x^3 + ax^2 + c = 0$ tiene tres raíces reales, demostrar que:
a) $a^2 - 3b \geq 0$
b) $\sqrt{a^2 - 3b}$ es menor que la diferencia entre la mayor y la menor de las raíces.

VIII OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMATICAS

Mexico D.F., Mexico

Primer día
14 de Setiembre, 1993

1. Un número natural es capicúa si al escribirlo en notación decimal se puede leer de igual forma de izquierda a derecha como de derecha a izquierda. Por ejemplo: 8, 23432, 6446. Sean $x_1 < x_2 < ... < x_i < x_{i+1} < ...$ todos los números capicúas. Para cada i sea $y_i = x_{i+1} - x_i$. ¿Cuántos números primos distintos tiene el conjunto $\{y_1, y_2, y_3 ...\}$?.

2. Muestre que para cualquier polígono convexo de área uno existe un paralelogramo de área 2 que lo contiene.

3. Sea $\mathbf{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$. Halle todas las funciones f: $\mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$ tales que:

- i) si $x < y$, entonces $f(x) < f(y)$.
- ii) $f(y\, f(x)) = x^2.f(xy)$, para todos los $x, y \in \mathbf{N}^*$.

Segundo Día
15 de Setiembre, 1993

4. Sea ABC un triángulo equilátero y l su círculo inscrito. Si D y E son puntos de los lados AB y AC, respectivamente, tales que DE es tangente a l. Demuestre que:

$$\frac{AD}{DB} + \frac{AD}{DB} = 1$$

5. Sean P y Q dos puntos distintos en el plano. Denotemos por m (PQ) la mediatriz del segmento PQ. Sea S un subconjunto finito del plano, con más de un elemento, que satisface las siguientes propiedades:

- a) Si P y Q están en S, entonces m (PQ) intersecta a S.
- b) Si P_1Q_1, P_2Q_2, P_3 Q_3 son tres segmentos diferentes cuyos extremos son puntos de S, entonces no existe ningún punto de S en la intersección de las tres líneas m (P_1Q_1), m$(P_2Q_2$ and m(P_3Q_3).

Determine el número de puntos que puede tener S.

6. Dos números enteros no negativos *a* y *b* son "cuates" si *a* + *b* tiene solamente 0 y 1 en su expresión decimal.

Sean A y B dos conjuntos infinitos de enteros no negativos tales que B es el conjunto de todos los números que son "cuates" de todos los elementos de A y A es el conjunto de todos los números que son "cuates" de todos los elementos de B.
Pruebe que en uno de los conjuntos A o B hay infinitos pares de números x, y tales que $x - y = 1$.

IX OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMATICAS

Fortaleza, Brasil

Primer Día
Setiembre, 1994

1. Se dice que un número natural **n** es "sensato" si existe un entero *r*, con $1 < r < n-1$, tal que la representación de n en base r tiene todas sus cifra iguales. Por ejemplo, 62 y 15 son sensatos, ya que 62 es 222 en base 5 y 15 es 33 en base 4. Demuestre que 1993 no es sensato pero 1994 si lo es.

2. Sea un cuadrilátero inscrito, cuyos vértices se denotan consecutivamente por A, B, C y D. Se supone que existe una semicircunferencia con centro en AB, tangente a los otros tres lados del cuadrilátero.

- i) Demostrar que $AB = AD + BC$.
- ii) Calcular, en función de $x = AB$, e $y = CD$, el área máxima que puede alcanzar un cuadrilátero que satisface las siguientes condiciones del enunciado.

3. En cada casilla de un tablero n x n hay una lámpara. Al ser tocada una lámpara cambia de estado ella misma y todas las lámparas situadas en la fila y la columna que ella determina (las que están encendidas se apagan y las apagadas se encienden). Inicialmente todas están apagadas. Demostrar que siempre es posible, con una sucesión adecuada de toques, que todo el tablero quede encendido y encontrar, en función de n, el número mínimo de toques para que se enciendan todas las lámparas.

Segundo Día
Setiembre, 1994

4. Se dan los puntos A, B y C sobre una circunferencia K de manera que el triángulo ABC es acutángulo. Sea P un punto interior a K. Se trazan las rectas AP, BP y CP, que cortan de nuevo a la circunferencia en X, Y y Z. Determinar el punto P para que el triángulo XYZ sea equilátero.

5. Sea *n* y *r* dos enteros positivos. Se desea construir *r* subconjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_r$ de $\{0, i, \ldots, n-1\}$ cada uno de ellos con *k* elementos exactamente y tales que, para cada entero x, $0 \leq x \leq n-1$, x_1 existe x_1 en A_1, x_2 en A_2 ,... , x_r en A_r (un elemento en cada conjunto) con:

$$x = x_1 + x_2 \ldots + x_r$$

Hallar el menor valor posible de K en función de *n* y *r*.

6. Demostrar que todo número natural $n \leq 2^{1000000}$ puede ser obtenido a partir de 1 haciendo menos de 1100000 sumas; mas precisamente, hay una sucesión finita de números naturales $x_0, x_1, \dots x_k$ con $k < 1100000$, $x_0 = 1$, $x_k = n$ tal que para cada $i = 1, 2, \dots, k$, existe r, s con $0 \leq r < i$, $0 \leq s < i$, $x_i = x_r + x_s$.

X OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMATICAS

Valparaiso, Chile

First Day
26 de Setiembre, 1995

1. Determine `los posibles valores de la suma de los digitos de todos los cuadrados perfectos.

2. Sea n un número entero mayor que 1. Determine los números reales $x_1, x_2, \dots . x_n \geq 1$ y $x_{n+1} > 0$, que verifiquen las dos condiciones siguientes:

a) $\sqrt{x_1} + \sqrt[3]{x_2} + \cdots + \sqrt[n-1]{x_n} = n\sqrt{x_{n+1}}$

b) $\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = x_{n+1}$

3. Sean *r* y *s* dos rectas ortogonales y que no están en el mismo plano. Sea AB su perpendicular común, donde A pertenece a r y B a S(*).
Se considera la esfera de diámetro AB.
Los puntos M, de la recta r y N, de la recta s, son variables, con la condición de que MN sea tangente a la esfera en un punto T. Determine el lugar geométrico de T.
Nota(*): el plano que contiene a B y r es perpendicular a s.

Segundo Día
27 de Setiembre, 1995

4. En un tablero de m x m casillas se colocan fichas. Cada ficha colocada en el tablero "domina" todas las casillas de la fila (⇔), la columna (⇕) y la diagonal (⇘), a la que pertenece (*). Determine el menor número de fichas que deben colocarse para que queden "dominadas" todas las casilla del tablero.
Nota (*): observe que la ficha no "domina" la diagonal (⇗).

5. La circunferencia inscrita en el triángulo ABC es tangente a BC, CA y AB en D, E y F respectivamente. Suponga que dicha circunferencia corta de nuevo a AD en un punto medio X, es decir, AX = XD. Las rectas XB y XC cortan de nuevo a la circunferencia inscrita en Y y en Z, respectivamente. Demuestre que EY = FZ.

6. Una función $f: N \to N$ es circular si para cada p en N existe n en N con $n \leq p$ tal que:

$$f^n(p) = f(f(\dots f(p) \dots))) = p$$

La función f tiene grado de repulsión k, $0 < k < 1$, si para cada p en N, $f^i(p) \neq p$ para $i \leq [H.p]$ (*)
Determine el mayor grado de repulsión que puede tener una función circular.
Nota (*): [x] indica el mayor entero menor o igual que x.

XI OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMATICAS

San Jose, Costa Rica

Primer Día
25 de Setiembre, 1996

1. Sea *n* un número natural. Un cubo de arista *n* puede ser dividido en 1996 cubos cyas aristas son también números naturales. Determine el menor valor posible de n.

2. Sea *M* el punto medio de la mediana AD del triángulo ABC (D pertenece al lado BC). La recta BM corta al lado AC en el punto N. Demuestre que AB es tangente a la circunferencia circunscrita al triángulo NBC si, y solo si, se verifica la igualdad:

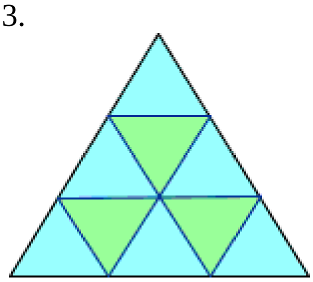
$$\frac{BM}{MN} = \left(\frac{BC}{BN}\right)^2$$

3. Tenemos un tablero cuadriculado de $k^2 - k + 1$ filas y $k^2 - k + 1$ columnas, donde $k = p + 1$ y p es un número primo. Para cada primo p, dé un método para distribuir números entre 0 y 1, un número en cada casilla del tablero, de modo que en cada fila haya exactamente k números 0 en cada columna haya exactamente k números 0 y además no haya ningún rectángulo de lados paralelos a los lados del tablero con números 0 en sus cuatro vértices.

Segundo Día
27 de Setiembre, 1996

4. Dado un número natural $n \geq 2$ considere todas las fracciones de la forma 1/ab, donde a y b son números naturales, primos entre sí y tales que
$a < b \leq n$
$a + b > n$
Demuestre que para cada n, la suma de estas fracciones es 1/2.

5. Tres fichas A, B y C están situadas una en cada vértice de un triángulo equilátero de lado n. Se ha dividido el triángulo en triangulitos equiláteros de lado 1, tal como muestra la figura en el caso $n = 3$.



Inicialmente todas las líneas de la figura están pintadas de azul. Las fichas se desplazan por las líneas, pintando de rojo su trayectoria, de acuerdo con las dos reglas siguientes:

- (i) Primero se mueve A, después B, después C, después A y así sucesivamente, por turnos. En cada turno, cada ficha recorre exactamente un lado de un triangulito, de un extremo a otro.
- (ii) Ninguna ficha puede recorrer un lado de un triangulito que ya esté pintado de rojo; pero puede descansar en un extremo pintado, incluso si ya hay otra ficha esperando allí su turno.

Demuestre que para todo entero $n > 0$ es posible pintar de rojo todos los lados de los triangulitos.

6. Se tiene n puntos distintos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ en el plano y a cada punto A_i se ha asignado un número real λ distinto de cero, de manera que:

$$\overline{A_i A_j}^2 = \lambda_i + \lambda_j$$ para todos los $i, j, i \neq j$

Demuestre que

- (a) $n \leq 4$
- (b) Si $n = 4$, entonces $\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} + \frac{1}{\lambda_4} = 0$

PRUEBA DE SELECCIÓN PARA LA DELEGACIÓN PERUANA

XII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

Problemas

1. Dado un entero $a_0 > 2$, se define la sucesión $a_0, a_1, a_2, \ldots$, del siguiente modo :

$$a_{k+1} = a_k \cdot (1 + a_k), \text{ si } a_k \text{ es impar}$$
$$a_{k+1} = (a_k)/2 \text{ , si } a_k \text{ es par}$$

Demostrar que existe un entero no negativo p tal que $a_p > a_{p+1} > a_{p+2}$.

2. Un entero positivo se llama "casi-triangular" si dicho entero es un número triangular ó suma de números triangulares distintos.

¿Cuántos números casi-triangulares existen entre 1 y 1997, inclusive?

NOTA: Los números triangulares son $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, \ldots$ donde

$$a_1 = 1 \text{ y } a_k = k + a_{k-1} \text{ para todo } k \geq 2.$$

3. En cada casilla de un tablero cuadrado n x n, $n \geq 2$, se escribe un entero no nulo. Dicho tablero se llama "tablero incaico" si para cada casilla (del tablero), el número escrito en ella es igual a la diferencia de los números escritos en dos de sus casillas vecinas. ¿Para qué valores de n se pueden obtener tableros incaicos ?.

NOTA: Dos casillas son vecinas si tienen un lado en común.

4. Dado un triángulo acutángulo ABC, mostrar una forma de construir con regla y compás el triángulo equilátero DEF, con D en BC, E en AC y F en AB de tal modo que las tres rectas respectivamente perpendiculares a BC por D, a AC por E y a AB por F sean concurrentes.

XII OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMATICAS

Guadalajara, México

Primer Día
16 de Setiembre, 1997

1. Sea $r \geq 1$ un número real que cumple la siguiente propiedad:

Para cada pareja de números enteros positivos m y n, con n múltiplo de m, se tiene que $[nr]$ *es múltiplo de* $[mr]$.

Probar que r es un numero entero.

Nota: Si x es un numero real, denotamos por $[x]$ el mayor entero menor o igual que x.

2. Con centro en el incetro I, de un triángulo ABC se traza una circunferencia que corta en dos puntos a cada uno de los tres lados del triángulo: al segmento BC en D y P (siendo D el más cercano a B); al segmento CA en E y Q (siendo E el más cercano a C), y al segmento AB en F y R (siendo F el más cercano a A).

Sea S el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero $EQFR$. Sea T el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero $FRDP$. Sea U el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero $DPEQ$.

Demostrar que las circunferencias circunscritas a los triángulos FRT, DPU y EQS tienen un único punto común.

3. Sean $n \geq 2$ un número entero y D_n el conjunto de dos puntos (x,y) del plano cuyas coordenadas son números enteros con $-n \leq x \leq n$ y $-n \leq, \leq n$.

a. Se dispone de 3 colores; cada uno de los puntos de D_n se colorea con uno de ellos. Demostrar que sin importar cómo se haya hecho esta coloración, siempre hay dos puntos de D_n del mismo color tales que la recta que los contiene no pasa por ningún otro punto de D_n.
b. Encontrar una forma de colorear los puntos de D_n utilizando 4 colores de manera que si una recta contiene exactamente dos puntos de D_n, entonces esos dos puntos tienen colores distintos.

Segundo Día
17 de Setiembre, 1996

4. Sea n un entero positivo. Consideremos la suma $x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$, donde los valores que pueden tomar las variables $x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n$ son únicamente 0 y 1. Sea $I(n)$ el numero de $2n$-adas $(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n)$ para las cuales el valor de la suma es un número impar y sea $P(n)$ el numero de $2n$-adas $(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n)$ para las cuales la suma toma valor par. Probar que

$$\frac{P(n)}{I(n)} = \frac{2^n + 1}{2^n - 1}$$

5. En un triángulo acutángulo ABC sean AE y BF dos alturas, y sea H el ortocentro. La recta simétrica de AE respecto de la bisectriz (interior) del ángulo en A y la recta simétrica de BF respecto de la bisectriz (interior) del ángulo en B se intersecan en un punto O. Las rectas AE y AO cortan por segunda vez a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC en los puntos M y N, respectivamente.

Sean: P, la intersección de BC con HN; R, la intersección de BC con OM; y S, la intersección de HR con OP.

Demostrar que $AHSO$ es un paralelogramo.

6. Sea $\mathbf{P} = \{P_1, P_2, ..., P_{1997}\}$ un conjunto de 1997 puntos en el interior de un círculo de radio 1, siendo P_1 el centro del círculo. Para cada $k = 1, ..., 1997$ sea x_k la distancia de P_k al punto de $\mathbf{P}$ más próximo a P_k y distinto de P_k. Demostrar que

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 + ... + (x_{1997})^2 \leq 9$$

XIII OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMATICAS

Puerto Plata, República Dominicana

Primer Día
22 de Setiembre, 1998

1. Se dan 98 puntos sobre una circunferencia. María y José juegan alternadamente de la siguiente manera: cada uno de ellos traza un segmento uniendo dos de los puntos dados que no hayan sido unidos entre si anteriormente. El juego termina cuando los 98 puntos han sido usados como extremos de un segmento al menos una vez. El vencedor es la persona que realiza el último trazo.

Si José inicia el juego, ¿quién puede asegurarse la victoria?.

2. La circunferencia inscrita en el triángulo ABC es tangente a los lados BC, CA y AB en los puntos D, E y F, respectivamente. AD corta la circunferencia en un segundo punto Q. Demostrar que la recta EQ pasa por el punto medio de AF si, y solamente si, AC = BC.

3. Hallar el mínimo número natural n con la siguiente propiedad: entre cualesquiera n números distintos, pertenecientes al conjunto {1, 2, ..., 999} se puede elegir cuatro números diferentes **a**, **b**, **c**, **d**, tales que **a** + 2**b** + 3**c** = **d**.

Segundo Día
23 de Setiembre, 1998

4. Alrededor de una mesa redonda están sentados representantes de n países ($n \geq 2$), de modo que satisfacen la siguiente condición: si dos personas son del mismo país, entonces sus respectivos vecinos de la derecha no pueden ser de un mismo país. Determinar, para cada n, el número máximo de personas que puede haber alrededor de la mesa.

5. Hallar el máximo valor posible de n para que existan puntos distintos $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ en el plano y números reales $r_1, r_2, \ldots, r_n$ de modo que la distancia entre cualquiera dos puntos diferentes P_i y P_j sea $r_i + r_j$.

6. Sea λ la raíz positiva de la ecuación $t^2 - 1998t - 1 = 0$. Se define la sucesión $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ por:

$$x_0 = 1$$
$$x_{n+1} = [\lambda x_n], \text{ para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Hallar el residuo (resto) de la división de x_{1998} por 1998.

NOTA: Los corchetes indican parte entera, es decir, $[x]$ es el único entero k tal que $k \leq x \leq k + 1$.

PRUEBA DE SELECCIÓN PARA LA DELEGACIÓN PERUANA

XIV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

Problemas

1. Sean: A, B y C tres puntos sobre una circunferencia dada Ω; O el incetro del triángulo ABC y M y N los puntos medios de los arcos BC y CA, respectivamente. El punto P de Ω es tal que PC//MN y el rayo PO corta a Ω en T. Demostrar que

$$NC.MT = MC.NT$$

Nota.- La ubicación de A, B y C en la circunferencia así como la orientación de los arcos en el sentido horario.

2. Un entero positivo se llama "casi-triangular" si dicho entero es un número triangular ó suma de números triangulares distintos.

¿Cuántos números casi-triangulares existen entre 1 y 1997, inclusive?

NOTA: Los números triangulares son a_1, a_2, a_3, ..., a_k, ... donde

$$a_1 = 1 \text{ y } a_k = k + a_{k-1} \text{ para todo } k \geq 2.$$

3. En cada casilla de un tablero cuadrado n x n, $n \geq 2$, se escribe un entero no nulo. Dicho tablero se llama "tablero incaico" si para cada casilla (del tablero), el número escrito en ella es igual a la diferencia de los números escritos en dos de sus casillas vecinas. ¿Para qué valores de n se pueden obtener tableros incaicos?.

NOTA: Dos casillas son vecinas si tienen un lado en común.

4. Dado un triángulo acutángulo ABC, mostrar una forma de construir con regla y compás el triángulo equilátero DEF, con D en BC, E en AC y F en AB de tal modo que las tres rectas respectivamente perpendiculares a BC por D, a AC por E y a AB por F sean concurrentes.

XIV OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMATICAS

La Habana, Cuba

Primer Día
Setiembre, 1999

1. Halle todos los enteros positivos que son menores que 1000 y cumplen con la siguiente condición: el cubo de la suma de sus dígitos es igual al cuadrado de dicho entero.

2. Dadas dos circunferencias M y N, decimos que M biseca a N si la cuerda común es un diámetro de N.
Considere dos circunferencias fijas C_1 y C_2 no concéntricas.

a) Pruebe que existen infinitas circunferencias B tales que B biseca a C_1 y B biseca a C_2.
b) Determine el lugar geométrico de los centros de las circunferencias B.

3. Sean n puntos distintos, P_1, P_2, ..., P_n, sobre una recta del plano ($n \geq 2$). Se consideran las circunferencias de diámetro P_iP_j ($1 \leq i \leq j \leq n$) y coloreamos cada circunferencia con uno de k colores dados. Llamamos (n-k)-nube a esta configuración. Para cada entero positivo k, determine todos los n para los cuales se verifica que toda (n-k)-nube contiene dos circunferencias tangentes exteriormente del mismo color.

Nota: Para evitar ambigüedades, los puntos que pertenecen a más de una circunferencia no llevan color.

Segundo Día
Setiembre, 1999

4. Sea B un entero mayor que 10 tal que cada uno de sus dígitos pertenece al conjunto {1, 3, 7, 9}. Demuestre que B tiene un factor primo mayor o igual que 11.

5. Un triángulo acutángulo ABC está inscrito en una circunferencia de centro O. Las alturas del triángulo son AD, BE y CF. La recta EF corta a la circunferencia en P y Q.

a) Pruebe que OA es perpendicular a PQ.
b) Si M es el punto medio de BC, pruebe que $AP^2 = 2.AD.OM$

6. Sean A y B puntos del plano y C un punto de la mediatriz de AB. Se construye una sucesión C_1, C_2, ..., C_n, ... de la siguiente manera:

$C_1 = C$ y para $n \geq 1$, si C_n no pertenece al segmento AB, C_{n+1} es el circuncentro del triángulo ABC_n.
Determine todos los puntos C tales que la sucesión C_1, C_2, ..., C_n, ... está definida para todo n y es periódica a partir de un cierto punto.

Nota: Una sucesión C_1, C_2, ..., C_n, ... es periódica a partir de un cierto punto si existen enteros positivos k y p tales que $C_{n+p} = C_n$ para todo $n \geq k$.

XV OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMATICAS

Prueba para seleccionar la Delegación Peruana

Problemas

1. Demostrar que los números 1, 2, 3, ..., 2000 pueden ser escritos en algún orden, uno a continuación del otro, de tal manera que, a partir del segundo, cada número divide a la suma de todos los escritos anteriormente.

2. Sea ABC un triángulo tal que el ángulo A mide 90° y la medida del ángulo B es menor que la medida del ángulo C. La tangente en A al circuncírculo Γ del triángulo ABC corta a la recta BC en D. Sean E el simétrico de A respecto de BC, X el pié de la perpendicular de A sobre BE e Y el punto medio de AX. La recta BY corta nuevamente a Γ en Z. Probar que la recta BD es tangente al circuncírculo del triángulo ADZ.

3. Dado un entero positivo par n. Hallar todas las ternas de números reales (x, y, z) que cumplen:

$$x^n y + y^n z + z^n x = x y^n + y z^n + z x^n$$

4. Demostrar que para todo entero positivo n existe un entero positivo m, cuadrado perfecto, que tiene como primeras cifras a todas las cifras de n (en el mismo orden).

[Por ejemplo, para n = 1535, existe m = 1535121 que es cuadrado perfecto y sus primeras 4 cifras son las mismas que las de n.]

XV OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMATICAS

Caracas, Venezuela

Primer Día
19 de Setiembre de 2000

1. Se construye un polígono regular de n lados ($n \geq 3$) y se enumeran sus vértices de 1 a n. Se trazan todas las diagonales del polígono. Demostrar que si n es impar, se puede asignar a cada lado y a cada diagonal un número entero de 1 a n, tal que se cumplan simultáneamente las siguientes condiciones:

1. El número asignado a cada lado o diagonal sea distinto a los asignados a los vértices que une.
2. Para cada vértice, todos los lados y diagonales que compartan dicho vértice tengan números diferentes.

2. Sean S_1 y S_2 dos circunferencias de centros O_1 y O_2, respectivamente, secantes en M y N. La recta t es la tangente común a S_1 y S_2, más cercana a M. Los puntos A y B son los respectivos puntos de contacto de t con S_1 y S_2, C el punto diametralmente opuesto a B y D el punto de intersección de la recta O_1O_2 con la recta perpendicular a la recta AM trazada por B. Demostrar que M, D y C están alineados.

3. Encontrar todas las soluciones de la ecuación

$$(x + 1)^{y} - x^{z} = 1$$

para x, y, z enteros mayores que 1.

Segundo Día
20 de Setiembre de 2000

4. De una progresión aritmética infinita: 1, a_1, a_2, ..., de números reales se eliminan términos, obteniéndose una progresión geométrica infinita: 1, a_{n1}, a_{n2}, ... de razón q. Encontrar los posibles valores de q.

5. Hay un montón de 2000 piedras. Dos jugadores se turnan para retirar piedras, alternadamente, de acuerdo a las siguientes reglas:

1. En cada jugada se pueden retirar 1, 2, 3, 4 ó 5 piedras del montón.
2. En cada jugada se prohíbe que el jugador retire la misma cantidad de piedras que retiró su oponente en la jugada previa.

Pierde el jugador que en su turno no pueda realizar una jugada válida. Determinar cuál jugador tiene estrategia ganadora y encontrarla.

6. Un hexágono convexo se denomina *bonito* si tiene cuatro diagonales de longitud 1, cuyos extremos incluyen todos los vértices del hexágono.

1. Dado cualquier número k, mayor que 0 y menor o igual que 1, encontrar un hexágono *bonito* de área k.
2. Demostrar que el área de cualquier hexágono *bonito* es menor que 3/2.