OLIMPIADA INTERNACIONAL DE MATEMATICAS

Las Olimpiadas Internacionales de Matemáticas (IMO) es una competencia de Matemáticas para los mejores y más brillantes estudiantes de Educación Secundaria de todos los países del mundo. Se lleva a cabo anualmente en un diferente país, frecuentemente en el mes de Julio. Cada país participa con una delegación de seis estudiantes, un Jefe de Delegación y un Profesor Tutor. Este año la 41° IMO se llevó a cabo en Taejon, Korea.

LA OLIMPIADA INTERNACIONAL DE MATEMATICAS

28º Olimpiada, la Habana, Cuba, 1987
29º Olimpiada, Camberra, Australia, 1988
30º Olimpiada, Branschweig, Alemania, 1989
31º Olimpiada, Beijing, China, 1990
32º Olimpiada, Sigtuna, Suecia, 1991
33º Olimpiada, Moscú, Rusia, 1992
34º Olimpiada, Estambul, Turquia, 1993
35º Olimpiada, Hong Kong, Hong Kong, 1994
36º Olimpiada, Toronto, Canadá, 1995
37º Olimpiada, Mumbai, India, 1996
38º Olimpiada, Mar del Plata, Argentina, 1997
39º Olimpiada, Taiwan, 1998
40º Olimpiada, Bucarest, Rumania, 1999
41º Olimpiada, Taejon, Korea del Sur, 2000

34th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD

İSTANBUL, 1993

34^{va} OLIMPIADA INTERNACIONAL DE MATEMATICAS

Estambul, Turquia

Primer día

18 de Julio, 1997

1. Sea $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$ con n entero, $n > 1$. Demuestre que f(x) no puede ser el producto de dos polinomios, ambos con todos sus coeficientes enteros y de grado mayor o igual que 1.

2. Sea ABC un triángulo acutángulo y D un punto en su interior tal que:

$$AC.BD = AD.BC \text{ y } \angle ADB = 90° + \angle ACB$$

(a) Calcule el valor de la razón

$$(AB.CD)/(AC.BD)$$

(b) Demuestre que las tangentes en C a las circunferencias circunscritas a los triángulos ACD y BCD son perpendiculares.

3. Sobre un tablero de ajedrez infinito se juega de la siguiente manera:
Al principio hay n^2 fichas dispuestas sobre el tablero en un cuadrado n x n de casillas adyacentes, con una ficha en cada casilla. Cada jugada es un salto de una ficha en dirección horizontal o vertical sobre una casilla adyacente, ocupada por otra, hasta una no ocupada, contigua a ella. La ficha sobre la que se ha saltado se retira. Halle los valores de n para los que el juego puede terminar quedando una única ficha en el tablero.

Segundo día

19 de Julio de 1993

4. Sean P, Q, R tres puntos del plano. Se define *m* (PQR) como el mínimo de las longitudes de las alturas del triángulo PQR (si P, Q, R están alineados, entonces *m* (PQR) = 0). Sean A, B, C puntos dados del plano. Demuestre que, para cualquier punto X del plano,

$$m(ABC) \leq m(ABX) + m(AXC) + m(XBC)$$

5. Sea **N** = {1, 2, 3, ...}. Determine si existe una función f: $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ que cumpla las condiciones siguientes:

$$f(1) = 2,$$
$$f(f(n)) = f(n) + n, \text{ para todo } n \in \mathbf{N}$$
$$\text{y } f(n) < f(n+1) \text{ para todo } n \in \mathbf{N}$$

6. Sea n > 1 un entero. Hay n lámparas $L_0, L_1, ..., L_{n-1}$ dispuestas en círculo. Cada lámpara puede estar encendida o apagada. Se lleva a cabo una sucesión de pasos S_0 , S_1, ..., S_i, ... El paso S_j afecta unicamente al estado de L_j (dejando inalterado el estado de las demás lámparas) como sigue:
si L_{j-1} está encendida, S_j cambia al estado de L_j de encendida a apagada o de apagada a encendida;
si L_{j-1} está apagada, S_j deja inalterado el estado de L_j.
Las lámparas se denotan mod n, esto es $L_{-1} = L_{n-1}$, $L_0 = L_n$, $L_1 = L_{n+1}$, etc. Inicialmente todas las lámparas están encendidas.
Demuestre que:

- (a) Existe un entero positivo M(n) tal que, después de M(n) pasos, todas las lámparas están encendidas de nuevo.
- (b) Si n es de la forma 2^k, todas las lámparas están encendidas después de $n^2 - 1$ pasos.
- (c) Si n es de la forma $2^k + 1$, todas las lámparas están encendidas después de $n^2 - n + 1$ pasos.

35° OLIMPIADA INTERNACIONAL DE MATEMATICAS

Hong Kong

Primer día

13 de Julio de 1994

1. (Propuesto por Francia)
Sean m y n enteros positivos y $a_1, a_2, ..., a_m$ elementos distintos de $\{1, 2, ..., n\}$, tales que siempre que $a_i + a_j \leq n$ para algunos i, j, con $1 \leq i \leq j \leq m$, entonces existe k, con $1 \leq k \leq m$, tal que $a_i + a_j = a_k$. Demostrar que

$$(a_1 + a_2 + ... + a_m)/m \geq (n+1)/2$$

2. (Propuesto por Armenia/Australia)
ABC es un triángulo isósceles con AB = AC. Se cumple que:

- (i)M el punto medio de BC y O es el punto de la recta AM tal que OB es perpendicular a AB;
- (ii) Q es un punto cualquiera del segmento BC distinto de B y de C;
- (iii) E está en la recta AB y F en la recta AC, de tal manera que E, Q y F son distintos y están alineados.

Probar que OQ es perpendicular a EF sí y sólo sí QE=QF.

3. (Propuesto por Rumania)
Para cualquier entero positivo k, f(k) es el número de elementos de $\{k+1, k+2, ..., 2k\}$ cuya representación en base 2 contiene exactamente tres unos.

- (a) Demostrar que para cada entero positivo m, existe al menos un entero positivo k tal que f(k)=m.
- (b) Determine all positive integer m for which there exists exactly one k with f(k)=m.

Second Day

July 14, 1994

4. (proposed by Australia)
Determine all ordered pairs (m,n) of positive integers such that

$$(n^3 + 1) / (mn - 1)$$

is an integer.

5. (proposed by United Kingdom)
Let S be the set of real numbers strictly greater than -1. Find all functions $f: S \to S$ satisfying the two conditions:

- (i) $f(x+f(y)+xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$ for all x and y in S;
- (ii) $f(x)/x$ is strictly increasing on each of the intervals $-1 < x < 0$ and $0 < x$.

6. (Proposed by Finland)
Show that there exists a set A of positive integers with the following property: For any infinite set S of primes there exist two positive integers m in A and n not in A each of which is a product of k distinct elements of S for some $k \geq 2$.

38a. OLIMPIADA INTERNACIONAL DE MATEMATICAS

Prueba de selección para la Delegación Peruana

Problemas

Tiempo de duración de la prueba: 3 horas.

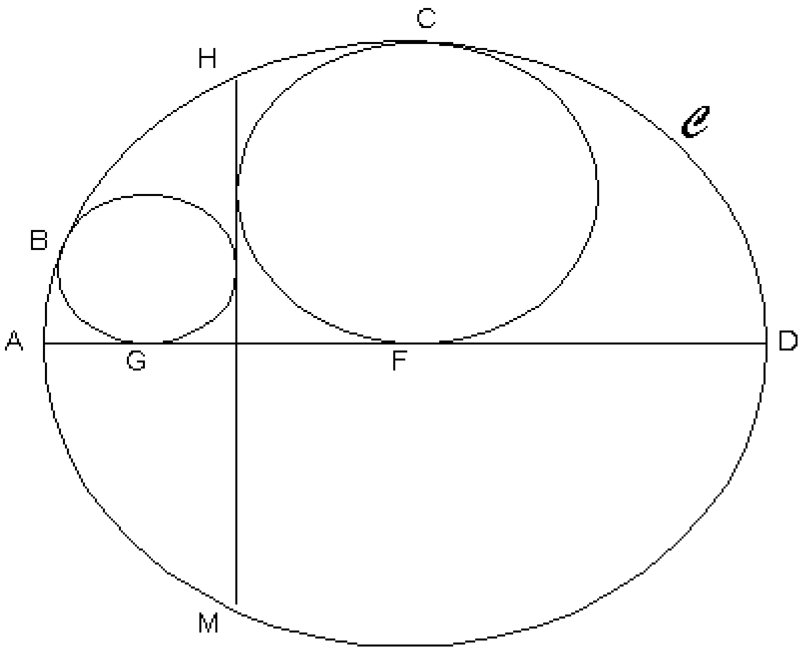
1. En la isla de los camaleones viven 10 camaleones de color marrón, 15 de color gris y 20 de color verde. Cada vez que se juntan dos camaleones de distinto color, ambos cambian su color al tercer color (por ejemplo, al juntarse un camaleón gris con uno marrón, ambos cambian su color a verde).

¿Es posible que después de algún tiempo todos los camaleones tengan el mismo color?.

2. En la circunferencia C de la figura, AD es un diametro de longitud 2R, HM es una cuerda perpendicular a AD y las circunferencias pequeñas son tangentes a HM, a AD y a la circunferencia C . Los puntos B, G, C y F son puntos de tangencia. Llamando P al punto de intersección de las prolongaciones de BG y CF, demostrar que se cumple la desigualdad:

$$6R^2 + 2S_1 + 2S_2 > BP^2 + CP^2$$

donde S_1 es el área del triángulo ABD y S_2 es el área del triángulo ACD.



3. Sea el conjunto M = {1, 2, ..., 1997}.
Demostrar que es posible construir r subconjuntos de M: $A_1, A_2, ..., A_r$, tales que para todo entero p, con $2 \leq p \leq 1908$, se cumplen las 3 condiciones siguientes:

- Si $i \neq j$, el número de elementos de A_i es distinto del número de elementos de A_j.
- Para cada A_i, existen p de tales subconjuntos, distintos de A_i, cuya unión contiene a A_i
- Para cada A_i, existen p de tales subconjuntos, distintos de A_i, cuya unión no contiene a A_i

San Miguel, 24 de Mayo de 1997.

38th International Mathematical Olympiad

38va OLIMPIADA INTENACIONAL DE MATEMATICAS

Mar del Plata, Argentina

Primer día

24 de Julio, 1997

1. En el plano los puntos de coordenadas enteras son los vértices de cuadrados. Los cuadrados se colorean alternadamente de blanco y negro (como los del tablero de ajedrez).

Para cada par de enteros positivos m y n, se considera un triángulo rectángulo cuyos vértices tienen coordenadas enteras y cuyos catetos, de longitudes m y n, están sobre los lados de los cuadrados.

Sea S_1 el área total de la región negra del triángulo y S_2 el área total de su región blanca. Sea

$$f(m,n) = | S_1 - S_2 |.$$

(a) Calcular f(m,n) para todos los enteros positivos *m* y *n* que son, o bien ambos pares o bien ambos impares.

(b) Probar que $f(m,n) \leq \frac{1}{2}\max\{m,n\}$ para todo m y n.

(c) Demostrar que no existe ninguna constante C tal que f(m,n) < C para todo *m* y *n*.

2. El ángulo *A* es el menor de los ángulos del triángulo *ABC*.

Los puntos B y C dividen a la circunferencia circunscrita del triángulo en dos arcos. Sea U un punto interior del arco BC que no contiene a A.

Las mediatrices de AB y AC cortan a la recta AU en V y W, respectivamente. Las rectas BV y CW se cortan en T.

Demostrar que

$$AU = TB + TC.$$

3. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reales que verifican las condiciones:

$$|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| = 1$$

y

$$|x_i| \le \frac{n+1}{2} \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Demuestre que existe una reordenación (o permutación) $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tal que

$$|y_1 + 2y_2 + \ldots + ny_n| \le \frac{n+1}{2}.$$

Segundo día

15 de Setiembre, 1993

4. Una matriz n x n (es decir, un tablero cuadrado de n filas y n columnas) se rellena con números del conjunto $S=\{1, 2, \ldots, 2n - 1\}$. Tal tablero se llama *matriz de plata* si, para cada $i = 1, \ldots, n$, la i-ésima fila y la i-ésima columna juntas contienen todos los números del conjunto S. Demostrar que:

(a) No existe ninguna matriz de plata para n = 1997;

(b) Existen matrices de plata para infinitos valores de n.

5. Determinar todas las parejas (a,b) de enteros $a \ge 1$, $b \ge 1$ que satisfacen la ecuación

$$a^{(b2)} = b^a.$$

6. Para cada entero positivo n , sea f(n) el número de formas en que se puede representar a n como suma de potencias de 2 con exponentes enteros no negativos.

Las representaciones que difieren únicamente en el orden de sus sumandos se consideran iguales. Por ejemplo f(4)=4, porque 4 puede ser representado en las cuatro siguientes formas:

$$4;\ 2+2;\ 2+1+1;\ 1+1+1+1.$$

Probar que, para todo entero $n \geq 3$:

$$2^{n2/4} < f(2n) < 2^{n2/2}.$$

41va OLIMPIADA INTERNACIONAL DE MATEMATICAS

Taejon, Korea

Primer día

19 de Julio, 2000

1. Dos circunferencias Γ_1 y Γ_2 se cortan en M y N. Sea l la tangente común a Γ_1 y Γ_2 tal que M está más cerca de l que N. La recta l es tangente a Γ_1 en A y a Γ_2 en B. La recta paralela a l que pasa por M corta de nuevo a Γ_1 en C y a Γ_2 en D. Las rectas CA y DB se intersectan en E; las rectas AN y CD se intersectan en P; las rectas BN y CD se intersectan en Q.

Demostrar que EP = EQ.

2. Sean a, b y c números reales positivos tales que $abc = 1$. Demostrar que

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\leq 1$$

3. Sea $n \geq 2$ un número entero positivo. Inicialmente hay n pulgas en una recta horizontal, y no todas están en el mismo punto. Para un número real positivo λ definimos un *salto* como sigue:

> Se eligen dos pulgas cualesquiera situadas en los puntos A y B con A a la izquierda de B;
> Luego, la pulga situada en A salta hasta el punto C de la recta, ubicado a la derecha de B, tal que BC/AB = λ

Determinar todos los valores de λ tales que, para cualquier punto M de la recta y cualquiera posiciones iniciales de las n pulgas, existe una sucesión finita de saltos que permite situar a todas las pulgas a la derecha de M.

Segundo día

20 de Julio, 2000

4. Un mago tiene 100 tarjetas numeradas del 1 al 100. Las coloca en tre cajas, una roja,

una blanca y una azul, de modo que cada caja contiene por lo menos una tarjeta.
Una persona del público selecciona dos de las tres cajas, alige una tarjeta de cada una, y anuncia a la audiencia la suma de los números de las dos tarjetas elegidas. Al conocer esta suma, el mago identifica la caja de la cual no se eligió ninguna tarjeta.
¿De cuántas formas se pueden distribuir todas las tarjetas en las cajas de modo que este truco siempre funcione?
(dos maneras de distribuir se consideran distintas, si hay al menos una tarjeta que es colocada en una caja diferente en cada distribución).

5. Determinar si existe un entero positivo n tal que:

> exactamente 2000 números primos distintos dividen a n, y n divide a $2^n + 1$.

6. Sean AH_1, BH_2, CH_3 las alturas de un triángulo acutángulo ABC. La circunferencia inscrita en el triángulo ABC es tangente a los lados BC, CA, AB en los puntos T_1, T_2, T_3, respectivamente.
Sea l_1 la recta que es simétrica a H_2H_3 con respecto a T_2T_3, l_2 la recta que es simétrica a H_3H_1 con respecto a T_3T_1, l_3 la recta que es simétrica a H_1H_2 con respecto a T_1T_2.
Demostrar que l_1, l_2, l_3 determinan un triángulo cuyos vértices son puntos de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC.