LA OLIMPIADA ASIÁTICO-PACÍFICA DE MATEMÁTICAS

Las Olimpiadas Asiático-Pacíficas de Matemáticas es una competencia de Matemáticas anual para estudiantes de secundaria de los países en las costas del Océano Pacífico. Tiene normas y procedimientos innovadores para ayudar a definir la competencia internacional, y al mismo tiempo asegura un conocimiento internacional estándar. La APMO ha sido modelo de otras competencias regionales alrededor del mundo (por ejemplo La Olimpiada de Mayo) donde los costos es una seria consideración.

LA OLIMPIADA ASIÁTICO-PACÍFICA DE MATEMÁTICAS

1º Olimpiada, 1989
2º Olimpiada, 1990
3º Olimpiada, 1991
4º Olimpiada, 1992
5º Olimpiada, 1993
6º Olimpiada, 1994
7º Olimpiada, 1995
8º Olimpiada, 1996
9º Olimpiada, 1997
10º Olimpiada, 1998
11º Olimpiada, 1999

1ra OLIMPIADA MATEMATICA ASIATICO-PACIFICA

Marzo, 1989

1. Sean $x_1, x_2, ..., x_n$ números reales positivos, y sea

$$S = x_1 + x_2 + ... + x_n.$$

Probar que

$$(1 + x_1)(1 + x_2)...(1 + x_n) \leq 1 + S + \frac{S^2}{2!} + \frac{S^3}{3!} + \ ... + \frac{S^n}{n!}$$

2. Probar que la ecuación

$$6(6a^2 + 3b^2 + c^2) = 5n^2$$

no tienen soluciones enteras con excepción de $a = b = c = n = 0$.

3. Sean A_1, A_2, A_3 tres puntos en un plano, y por conveniencia, sea $A_4 = A_1$, $A_5 = A_2$. Para n = 1, 2 y 3 , sea B_n el punto medio de A_nA_{n+1} y sea C_n el punto medio de A_nB_n. Suponga que A_nC_{n+1} y B_nA_{n+2} se encuentran en D_n y que A_nB_{n+1} y C_nA_{n+2} se encuentran en E_n. Calcular la relación entre el área del triángulo $D_1D_2D_3$ y el área del triángulo $E_1E_2E_3$.

4. Sea S un conjunto que consta de m pares (a, b) de enteros positivos con la propiedad de que $1 \leq a \leq b \leq n$. Muestre que hay por lo menos

$$4m\frac{(m - n^2/4)}{3n}$$

ternas (a, b, c) tales que (a, b),(a, c) y (b, c) pertenece a S.

5. Determinar todas las funciones de f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tales que

1. $f(x)$ es estrictamente creciente,
2. $f(x) + g(x) = 2x$ para todo real x,

Donde $g(x)$ es la función inversa de $f(x)$.
(Nota: f y g se dice que son función inversa si $f(g(x)) = x$ y $g(f(x)) = x$ para todo real x).

2^{da} OLIMPIADA MATEMATICA ASIATICO-PACIFICA

Marzo, 1990

1. Dado el ΔABC, sean G, E, F los puntos medios BC, AC, AB respectivamente y sea G el centroide del triángulo.
Para cada valor de $\angle BAC$, ¿Cuántos triángulos no semejantes existen, tales que $AEGF$ es un cuadrilátero cíclico?

2. Sean $a_1 a_2, \ldots, a_n$ números reales, y sea S_k la suma de los productos de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tomados de k en k.
Demostrar que

$$S_k S_{n-k} \geq \binom{n}{k}^2 a_1 a_2 \ldots a_n, \text{para } k = 1, 2, \ldots, n-1$$

3. Considerar todos los triángulos ABC los cuales tienen una base fija AB y cuya altura trazada desde C es una constante h. ¿Para cuáles de estos triángulos, el producto de sus alturas es el máximo?

4. Un conjunto de 1990 personas esta dividida en dos subconjuntos disjuntos de tal manera que:

1. nadie en un subconjunto conoce a todas las personas de dicho subconjunto;
2. entre tres personas cualesquiera de un subconjunto, hay siempre por lo menos dos que no se conocen entre si; y
3. para dos personas cualesquiera en un subconjunto que no se conocen, hay exactamente una persona en el mismo subconjunto que las conoce a ambas.

- Pruebe que dentro del mismo subconjunto, cada persona tiene el mismo número de conocidos con los demás.
- Determine el número máximo posible de subconjuntos.

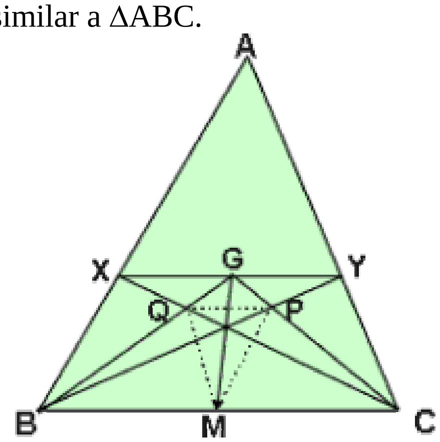
Nota: Se sobreentiende que si una persona A conoce a la persona B, entonces la persona B también conoce a la persona A; Se asume que cada persona se conoce a sí mismo.

5. Demuestre que para cada entero $n \geq 6$, existe un exágono convexo el cual puede ser dividido en exactamente n triángulos congruentes.

3ra OLIMPIADA MATEMATICA ASIATICO-PACIFICA

Marzo, 1991

1. Dado el ΔABC, sea G el centroide y sea M el punto medio de BC. Sea X en AB y Y en AC de modo que los puntos X, G y Y no colineares y XGY y BC son paralelos. Suponer que XC y GB se interceptan en Q y que YB y GC interceptan a P. Demuestre que ΔMPQ es similar a ΔABC.



2. Suponer que hay 997 puntos dados en un plano. Si se unen los puntos de dos en dos con un segmento coloreado de rojo, demuestre que hay por lo menos 1991 puntos rojos en el plano. ¿Se podría encontrar un caso especial con exáctamente 1991 puntos rojos?

3. Sean $a_1 a_2, \ldots a_n, b_1 b_2, \ldots, b_n$ números positivos reales tales que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

Demuestre que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(a_k)^2}{a_k + b_k} \geq \sum_{k=1}^{n} a_k$$

4. Durante un recreo n los niños de una escuela se sientan en círculo alrededor del maestro para participar en un juego. El maestro camina cerca de los alumnos en el sentido de las agujas del reloj y entrega caramelos a algunos de ellos de acuerdo a la siguiente regla: él selecciona un niño y le da un caramelo, luego salta un lugar y le da al próximo niño un caramelo, luego salta dos lugares y le da al próximo niño un caramelo, luego salta tres lugares, y asi por el estilo.

Determinar el valor de n para que eventualmente (quizás despues de muchas vueltas) todos los niños tengan por lo menos un caramelo cada uno.

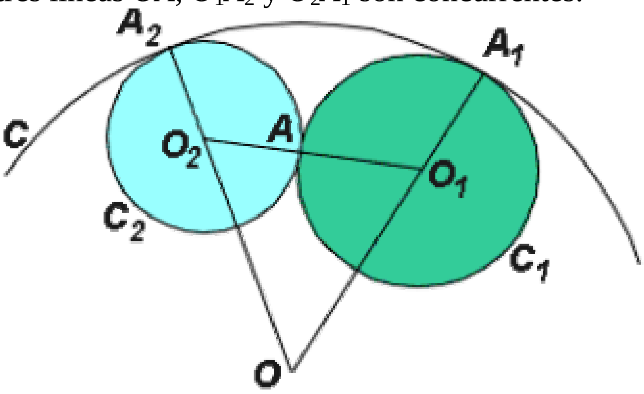
5. Dados dos círculos tangentes, C_1,C_2, y un punto P en su eje radial, por ejemplo en la tangente común de C_1 y C_2 que es perpendicular a la línea que une los centros de C_1 y C_2.
Construir con regla y compás el círculo C que es tangente a C_1 y C_2 y pasa por el punto P.

4º OLIMPIADA MATEMATICA ASIATICO-PACIFICA

Marzo, 1992

1. Los lados de un triángulo son, a, b y c. Denotar por s el semiperímetro, que es $s = (a + b + c)/2$. Construir un triángulo con lados $s - a$, $s - b$ y $s - c$. Este proceso se repite hasta que un triángulo no pueda ser construido más con la longitud de los lados dadas. Para cuántos triángulos originales este proceso se puede repetir indefinidamente?

2. En un círculo C con centro O y radio r, se encuentran dos círculos C_1, C_2 con centros O_1, O_2 y radios r_1, r_2 respectivamente, de manera que cada círculo C_i es internamente tangente a C en A_i y asi también C_1, C_2 son externamente tangente uno a otro en A.
Demostrar que las tres líneas OA, O_1A_2 y O_2A_1 son concurrentes.



3. Sea n un entero de modo que $n < 3$. Suponer que seleccionamos tres números del conjunto $\{2, 3, ... n\}$. Usando cada combinación de estos tres números solamente una vez, y utilizando sumas multiplicación y paréntesis formar toda posible combinación.

- Mostrar que si seleccionamos los tres números mayores que $n/2$, entonces el valor de estas combinaciones son todas distintas.
- Sea p un número primo de modo que $p \leq \sqrt{n}$. Mostrar que la cantidad de maneras de seleccionar tres números de modo que el menor sea p y los valores de las combinaciones que no son todas distintas es precisamente el número del divisor positivo de $p - 1$.

4. Determinar todos los pares (h, s) de enteros positivos con la siguiente propiedad:
Si se dibuja h líneas horizontales y otro s líneas que satisfagan

1. No hay líneas horizontales,
2. nunca dos de ellas son parelelas,
3. nunca tres de $h + s$ líneas son concurrentes,

entonces la cantidad de regiones formados por estas $h + s$ líneas es 1992.

5. Encontrar una secuencia de longitud máxima consistente en enteros no ceros en la cual la suma de siete de sus términos consecutivos cualquiera es positivo y que once de sus términos consecutivos sea negativo.

5^{ta} OLIMPIADA MATEMATICA ASIATICO-PACIFICA

Marzo, 1993

1. Sea *ABCD* un cuadrilátero tal que todos sus lados y ángulos tengan la mismas dimensiones *ABC* es 60°. Sea *l* una líneas pasando por *D* y no interceptando el cuadrilátero (excepto en *D*). Sea *E* y *F* los puntos de intercepción de *l* con *AB* y *BC* respectivamente. Sea *M* el punto de intercepción *CE* y *AF*.
Demostrar que $CA^2 = CM \times CE$.

2. Encontrar el número total de valores enteros diferentes que la función

$$f(x) = [x] + [2x] + [5x/3] + [3x] + [4x]$$

puede tomar para números reales x con $0 \leq x \leq 100$.

3. Sea

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 \text{ y}$$

$g(x) = c_{n+1}x^{n+1} + c_nx^n + ... + c$<SUB0< SUB>

polinomios no ceros con coeficientes reales de modo que $g(x) = (x + r)f(x)$ para algunos números reales r. Si a = max(|a<SUBN< SUB>|, ... , |a_0 y $c = max(|c_{n+1}|, ... |c_0|)$, demostrar que $a/c \leq n + 1$.

4. Determinar todos los enteros positivos n para la cual la ecuación

$$x^n + (2 + x)^n + (2 - x)^n = 0$$

tiene un entero como solución.

5. Sea $P_1, P_2, ... , P_{1993} = P_0$ puntos distintos en el plano x-y con las siguientes propiedades:

1. Ambas coordenadas de P_i son enteros, para $i = 1, 2, ... , 1993$;
2. no hay otro punto mas que P_i y P_{i+1} en el segmento que une P_i con P_{i+1} cuyas coordenadas son ambos enteros, para $i = 0, 1, ... , 1992$.

Demostrar que para algunos i, $0 \leq i \leq 1992$, existe un punto Q con coordenadas (q_x, q_y) en el segmento que une P_i con P_{i+1} de tal manera que ambas $2q_x$ y $2q_y$ sean enteros impares.

6^{ta} OLIMPIADA ASIATICO-PACIFICA

Marzo, 1994

1. Sea f: **R** $\rightarrow$ **R** una función tal que:

- (i) Para todo x, y $\in$ **R**:

$$f(x) + f(y) + 1 \geq f(x+y) \geq f(x) + f(y),$$

- (ii) Para todo x $\in$ [0,1), $f(0) \geq f(x)$
- (iii) $- f(-1) = f(1) = 1$

Encontrar todas las funciones posibles de f.

2. Dado un triángulo no degenerativo ABC, con circuncentro O, ortocentro H y circunradio R, probar que $|OH| < 3R$

3. Sea n un entero de la forma $a^2 + b^2$, donde a y b son enteros primos relativos tal que si p es primo, $p \leq \sqrt{n}$, entonces p divide a ab. Determine todos los valores posibles de n.

4. ¿Habrá un infinito conjunto de números en un plano de modo que no haya tres puntos colineares, y que la distancia entre dos puntos cualesquiera sea racional?.

5. Se da tres listas A, B y C. La lista A contiene los números de la forma 10^k en base 10, con k como cualquier entero mayor o igual a 1. Las listas B y C contienen los mismos números pero en base 2 y 5 respectivamente:

A	B	C
10	1010	20
100	1100100	400
1000	1111101000	13000
∘	∘	∘
∘	∘	∘
∘	∘	∘

Demostrar que para cada entero > 1, hay exactamente un número en exactamente una de las listas B o C que tiene exactamente n digitos.

7ª OLIMPIADA ASIATICO-PACIFICA

Marzo, 1995

1. Determine todas las secuencias de números reales $a_1, a_2, ..., a_{1995}$ que satisfagan:

$$2\sqrt{a_n - (n-1)} \geq a_{n+1} - (n-1)$$

para n = 1, 2, ..., 1994, y

$$2\sqrt{a_{1995} - 1994} \geq a_1 + 1$$

2. Sea $a_1, a_2, ... , a_n$ una secuencia de enteros con enteros cuyos valores están entre 2 y 1995 de tal manera que:

- (i) Cualquier par de a_i's son primos relativos,
- (ii) Cada uno de a_i es primo o un producto de primos.

Determinar el valor mas pequeño posible de n para asegurar que la secuencia contenga un número primo.

3. Sea PQRS un cuadrilátero cíclico tal que los segmentos PQ y RS no sean paralelos. Considerar los conjuntos de círculos a traves de P y Q, y el conjunto de círculos a travez de R y S. Determinar el conjunto A con puntos de tangencia en los círculos en estos dos conjuntos.

4. Sea C un cículo con radio R y centro O, y S un punto fijo en el interior de C. Sea AA' y BB' cuerdas perpendiculares a traves de S. Considerar los rectángulos SAMB, SBN'A', SA'M'B', y SB'NA. Encontrar el conjunto de puntos M, N', M' y N cuando A se mueve alrededor de todo el círculo.

5. Encontrar el mínimo entero positivo k tal que exista una función f del conjunto **Z** de los enteros {1, 2, ..., k} con la propiedad $f(x) \neq f(y)$ siempre que $|x - y| \in \{5, 7, 12\}$.

8^{th} OLIMPIADA ASIATICO-PACIFICA

Marzo, 1996

1. Sea ABCD un cuadrilátero AB = BC = CD = DA. Sea MN y PQ dos segmentos perpendiculares a la diagonal BD tal que la distancia entre ellos sea d > BD/2, con M $\in$ AD, N $\in$ DC, P $\in$ AB, y Q $\in$ BC. Demostar que el perímetro del exágono AMNCQP no depende de la posición de MN y PQ tanto como que la distancia entre ellas permanezca constante.

2. Sea m y n enteros positivos tal que n ≤ m. Probar que:

$$2^n n! \leq \frac{(m+n)!}{(m-n)!} \leq (m^2 - m)^n$$

3. Sea P_1, P_2, P_3, P_4 cuatro puntos en el círculo, y sea I_1 el incentro del triángulo $P_2 P_3 P_4$; I_2 el incentro del triángulo $P_1 P_3 P_4$; I_3 el incentro del triángulo $P_1 P_2 P_4$; I_4 el incentro del triángulo $P_1 P_2 P_3$. Probar que I_1, I_2, I_3, I_4 son los vértices de un rectángulo.

4. El consulado nacional decidió invitar a n parejas para formar 17 grupos de discusión con las siguientes condiciones:

1. Todos los miembros de un grupo deben ser de un mismo sexo; por ejemplo todos son hombres o todos son mujeres.
2. Que la diferencia entre la cantidad de personas entre dos grupos cualquiera sea 0 ó 1.
3. Todos los grupos tienen al menos un integrante.
4. Cada persona pertenecerá a uno y solo un grupo.

Encontrar todos los valores de n, n ≤ 1996, para que esto sea posible. Justifique su respuesta.

5. Sea a, b, c las longitudes de los lados de un triángulo. Probar que

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$$

y determine cuándo las igualdades ocurren.

9° OLIMPIADA ASIÁTICO-PACÍFICA DE MATEMÁTICAS

13 de Marzo, de 1997

1. Dado

$$S = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{3}} + \frac{1}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{1993006}}$$

Donde el denominador esta formado por las sumas parciales de la sucesión de los recíprocos de los números triángulares, demostrar que S > 1001.

2. Hallar un entero n, con $100 \le n \le 1997$, tal que $(2^n + 2)/n$ sea también entero.

3. Sean ABC un triángulo inscrito en una circunferencia, m_a, m_b,m_c las longitudes de las bisectrices del triángulo y , M_a, M_b, M_c las longitudes de las prolongaciones de dichas bisectrices hasta su segunda intersección con la circunferencia. Si

$$l_a = \frac{M_a}{m_a}, \quad l_b = \frac{M_b}{m_b}, \quad l_c = \frac{M_c}{m_c}$$

Demostrar que:

$$\frac{l_a}{sen^2 A} + \frac{l_b}{sen^2 B} + \frac{l_c}{sen^2 C} \ge 3$$

y vale la igualdad si y solo si ABC es equilátero.

4. El triángulo $A_1 A_2 A_3$ es rectángulo en A_3. Se define una sucesión de puntos mediante el siguiente proceso interactivo para cada entero positivo n. Se traza desde A_n ($n \le 3$) la perpendicular al segmento $A_{n-2} A_{n-1}$ que lo intercepta en A_{n+1}.

- Demostrar que si este proceso se continúa indefinidamente, entonces hay solamente un punto P en el interior de todos los triángulos $A_{n-2} A_{n-1} A_n$, $n \le 3$.
- A_1 y A_2 puntos fijos. Hallar el lugar geométrico de los puntos P al variar A_2 en todas sus posibles ubicaciones.

5. Supongamos que n personas $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ($n \le 3$) están sentadas en círculo y que A_i tiene a_i objetos tales que $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n$N, donde N es un número positivo. Para que todas las personas tengan la misma cantidad de objetos, cada persona A_1 le da o recibe objetos de sus dos vecinos A_{i-1} y A_{i+1} donde A_{n+1} quiere decir A_1 y A_0 quiere decir A_n. ¿Cómo se debe realizar esta distribución para que el número total de objetos transferidos sea el mínimo?

10° OLIMPIADA ASIÁTICO-PACÍFICA DE MATEMÁTICAS

14 de Marzo de 1998

1. Sea F el conjunto de todas las n-uplas $(A_1, A_2, ..., A_n)$ donde cada A_i, $i=1,2,...,n$ es un subconjunto de $\{1,2,...,1998\}$. Denotamos con $|A|$ al número de elementos del conjunto A. Hallar el número

$$\sum_{(A_1, A_2, ..., A_n) \in F} |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$$

2. Demostrar que cualesquiera sean los números enteros positivos *a* y *b*, el producto $(36a + b).(a + 36b)$ no puede ser una potencia de 2.

3. Sean *a*, *b*, *c* números reales positivos. Demostrar que

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) \geq 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)$$

4. Sea ABC un triángulo y D el pie de la altura dese A. Consideramos dos puntos E y F, ambos distintos de D y pertenecientes a una misma recta por D, tales que AE es perpendicular a BE y AF es perpendicular a CF. Sean M y N los puntos medios de BC y EF, respectivamente. Demostrar que AN es perpendicular a NM.

5. Determinar el mayor entero *n* con la propiedad de que *n* es divisible por todos los enteros positivos que son menores que $\sqrt[3]{n}$.

11° OLIMPIADA ASIÁTICO-PACÍFICA DE MATEMÁTICAS

13 de Marzo de 1999

1. Encuentre el menor entero positivo n con la siguiente propiedad: no existe una progresión aritmética de 1999 términos de números reales conteniendo exactamente n enteros.

2. Sea $a_1, a_2, \ldots$ una sucesión de números reales que satisfacen $a_{i+j} \leq a_i + a_j$ para todo i, j = 1, 2, ... Pruebe que, para todo entero positivo n, se cumple:

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \ldots + \frac{a_n}{n} \geq a_n$$

3. Sean Γ_1 y Γ_2 dos circunferencias que se intersecan en los puntos P y Q. La tangente común a Γ_1 y Γ_2, más cercana a P, toca a Γ_1 en A y a Γ_2 en B. La tangente de Γ_1 en P interseca a Γ_2 en C, siendo C diferente de P, y la prolongación de AP interseca a BC en R. Pruebe que la circunferencia circunscrita al triángulo PQR es tangente a BP y BR.

4. Determine todos los pares (a, b) de números enteros tales que los números $a^2 + 4b$ y $b^2 + 4a$ son, ambos, cuadrados perfectos.

5. Sea S un conjunto de $2n + 1$ puntos en el plano, tales que no existen tres de ellos colineales ni cuatro perteneciendo a la misma circunferencia. Un círculo se denomina *bueno* si tiene tres puntos de S en su circunferencia, $n - 1$ puntos de S en su interior y $n - 1$ puntos de S en su exterior. Pruebe que el número de círculos *buenos* tiene la misma paridad de n.