LA OLIMPIADA MATEMATICA DE CENTROAMERICA Y DEL CARIBE

Las Olimpiadas Centroamericanas son, como su nombre lo indica, una competencia regional de matemáticas para todos los países de la región de Centroamérica y del Caribe. En ella pueden participar los siguientes países: Colombia, Costa Rica, Cuba, El Salvador, Guatemala, Honduras, Nicaragua, México, Panamá, Puerto Rico, República Dominicana y Venezuela.

Se realizó por vez primera en San José, Costa Rica, en julio de 1999. La segunda Olimpiada se llevó a cabo en San Salvador, El Salvador, el año 2000. Las próximas olimpiadas se llevarán a cabo en Colombia y México.

En forma similar a la Olimpiada Iberoamericana, el evento contempla dos pruebas de tres preguntas cada una con una duración de 4 horas y media.

1º Olimpiada, San José, Costa Rica, 1999
2º Olimpiada, San Salvador, El Salvador, 2000

I OLIMPIADA MATEMATICA DE CENTROAMERICA Y DEL CARIBE

San José, Costa Rica

Primer día
Julio, 1999

1. Se supone que 5 personas conocen, cada una, informaciones parciales sobre cierto asunto. Cada vez que la persona A telefonea a la persona B, A le da a B la información que conoce en ese momento sobre el asunto, mientras que B no le dice a A nada de él. ¿Cuál es el mínimo número de llamadas necesarias para que todos sepan todo sobre el asunto? ¿Cuántas llamadas son necesarias si son *n* personas?

2. Encuentre un entero positivo *n* de 1000 cifras, todas distintas de cero, con la sitguiente propiedad: es posible agrupar las cifras de n en parejas de tal manera que si multiplicamos las dos cifras de cada pareja y sumamos los 500 productos obtenemos como resultado un número *m* que es divisor de *n*.

3. Las cifras de una calculadora (a excepción del 0) están dispuestas en la forma indicada en el cuadro adjunto, donde aparece también la tecla "+":

7	8	9	
4	5	6	
1	2	3	+

Dos jugadores A y B juegan de la manera siguiente: A enciende la calculadora y pulsa una cifra, y a continuación pulsa la tecla +. Pasa la calculadora a B, que pulsa una cifra en la misma fila o columna que la pulsada por A que no sea la misma que la última pulsada por A; a continuación pulsa + y le devuelve la calculadora a A, que repite la operación y así sucesivamente. Pierde el juego el primer jugador que alcanza o supera la suma 31. ¿Cuál de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y cuál es ésta?

Segundo día
Julio, 1999

4. En el trapecio ABCD de bases AB y CD, sea M el punto medio del lado DA. Si BC = a, MC = b y el ángulo MCB mide 150°. Halle el área del trapecio ABCD en función de a y b.

5. Sea a un entero positivo impar mayor que 17, tal que $3a - 2$ es un cuadrado perfecto. Demuestre que existen enteros positivos b y c tales que $a + b$, $a + c$, $b + c$ y $a + b + c$ son cuatro cuadrados perfectos.

6. Sea S un subconjunto de {1, 2, 3, ..., 1000} con la propiedad de que ninguna suma de dos elementos diferentes de S esté en S. Encuentre el número máximo de elementos de S.

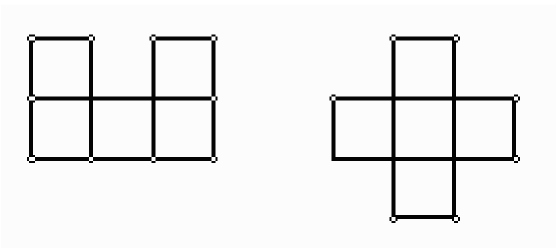
II OLIMPIADA MATEMATICA DE CENTROAMERICA Y DEL CARIBE

San Salvador, El Salvador

Primer día
10 de Julio, 2000

1. Encontrar todos los números naturales de tres dígitos abc ($a > 0$), tales que $a^2 + b^2 + c^2$ es divisor de 26.

2. Determinar todos los enteros $n \geq 1$ para los cuales es posible construir un rectángulo de lados 15 y n con piezas congruentes a:



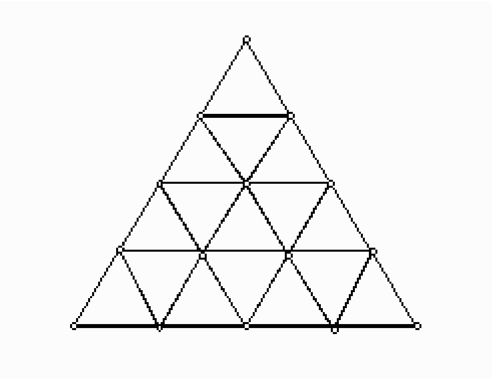
3. Sea ABCDE un pentágono convexo (las diagonales quedan dentro del pentágono). Sean P, Q, R y S los baricentros de los triángulos ABE, BCE, CDE y DAE, respectivamente.

Demostrar que PQRS es un paralelogramo y que su área es igual a 2/9 del área del cuadrilátero ABCD.

Nota: El baricentro o centroide es el punto donde concurren las medianas.

Segundo día
20 de Julio, 2000

4. En la figura, escribir un entero positivo dentro de cada triangulito, de manera que el número escrito en cada triangulito que tenga al menos dos vecinos, sea igual a la diferencia de los números escritos en algún par de sus vecinos.



Nota: Dos triangulitos son vecinos si comparten un lado.

5. Sea ABC un triángulo acutángulo. C_1 y C_2 son circunferencias que tienen a los lados AB y CA como diámetros, respectivamente. C_2 corta al lado AB en el punto F (F distinto de A) y C_1 corta al lado CA en el punto E (E distinto de A). Además, BE corta a C_2 en P y CF corta a C_1 en Q. Demostrar que las longitudes de los segmentos AP y AQ son iguales.

6. Al escribir un entero n mayor o igaul que 1 como potencia de 2 o como suma de potencias de 2, donde cada potencia aparece a lo más dos veces en la suma, se tiene una "representación buena" de n.

a) Escriba las 5 representaciones buenas de 10.
b) ¿Qué enteros positivos admiten un número par de representaciones buenas?

Nota: Dos representaciones buenas que difieren sólo en el orden de los sumandos se consideran la misma.