XXII OLIMPIADA RUSA

GRADO 11
PRIMER DIA
Ryazan, 1996

Problema 1.

¿Puede el número, obtenido al escribir en una fila los números del 1 al n (uno después de otro), presentar los mismos dígitos cuando es leído de izquierda a derecha como cuando es leído de derecha a izquierda?

Problema 2.

Cierta cantidad de hombres se están moviendo con velocidad constante en una línea recta. Se sabe que un intervalo de tiempo dado la suma de todas las distancias mutuas entre ellos va decreciendo monotónicamente. Probar que la suma de las distancias entre un hombre y cada uno de los otros, en el mismo intervalo de tiempo, también va decreciendo monotónicamente.

Problema 3.

Probar que al cortar una pirámide cuya base es un polígono regular de n lados, no se puede obtener como sección un polígono regular de (n + 1) lados, donde $n \geq 5$.

Problem 4.

Probar que si $a_1, a_2, ..., a_m$ son numeros diferentes de cero y $a_1 + a_2.2^k + a_3.3^k + ... + a_m.m^k = 0$ para cada entero k = 0, 1, ..., n ($n < m-1$), entonces hay al menos n pares de números vecinos con diferentes signos en la secuencia $a_1, a_2, ..., a_m$

SECOND DAY

Problem 1.

Existen tres números naturales, todos ellos mayores que uno, tales que el cuadrado de cada número disminuido en uno, puede ser dividido por cada uno de los otros números?.

Problem 2.

La bisectriz CD es trazada en un triángulo isósceles ABC (AB = BC). La recta que es perpendicular a CD y pasa por el circuncentro de ABC corta a BC en E. La recta paralela a CD que pasa por el punto E corta a AB en F. Probar que BE = FD.

Problem 3.

¿Existe un conjunto finito M de números reales no triviales, tales que para cada número natural n, existe un polinomio de grado no menor que n con coeficientes incluídos en M y donde todas sus raíces también están incluídas en M?.

Problem 4.

Los enteros del 1 al 100 son escritos en una fila en un orden desconocido. Con una pregunta acerca de 50 números cualesquiera , nosotros podemos saber en que orden relativo uno respecto al otro estos 50 números han sido escritos. Cuántas preguntas deben ser hechas al menos para saber en qué orden han sido escritos los 100 números?.

OLIMPIADA MATEMATICA 1996 DE LA REPUBLICA POPULAR CHINA

Primer día 8:00 - 12:30 18 Enero 1996

Problema 1.

H es el ortocentro de un triángulo agudo ABC, en A, se traza dos tangentes AP y AQ del círculoof cuyo diámetro es BC, los puntos de tangencia son P y Q respectivamente. Probar: P, H, Q son colineares.

Problema 2.

S={1,2,...,50}. Encontrar el mínimo número natural k, tal que cualquiera k-elemento del subconjunto S, hayan dos diferentes elementos a y b, a+b|ab.

Problema 3.

La Función F: R a R satiface $F(x^3+y^3)=(x+y)((F(x))^2-F(x)F(y)+(F(y))^2)$, donde x, y son numeros naturales arbitrarios. Probar: Para número real x, F(1996x)=1996F(x).

Segundo día 8:00 - 12:30 19 Enero 1996

Problema 4.

Ocho cantantes toman parte en un festival artístico. El organizador quiere planear m conciertos. Para cada concierto hay 4 cantantes que salen a escena. Restringir el tiempo para que cada dos cantantes que salgan a escena sea siempre el mismo. Haga un diseño para que m sea el mínimo.

Problema 5.

Para el número natural n, $X_0=0$, $X_i>0$, i=1,2,..,n, and sum(i=1 to n, X_i)=1. Probar: 1 ≤ sum(i=1 to n, X_i/(sqr(1+X_0+X_1+...+$X_{(i-1)}$)sqr(Xi+...+Xn))

Problema 6.

En el triángulo ABC, el ángulo C=90 grados, el ángulo A=30 degrees, BC=1. Encontrar el mínimo valorde todas los lados mas largos en el triángulo inscrito en ABC. Un triángulo inscrito significa que todos los vértices del triángulo pertenecen a los tres lados del triangulo ABC respectivamente.

I OLIMPIADA BOLIVARIANA DE MATEMATICAS

NIVEL INTERMEDIO

Primer día
8 de Junio, 2000

1. Se seleccionan tres dígitos al azar distintos de 0. Se pega uno de esos dígitos en la frente de Ana, otro de los dígitos en la frente de Baty y el último dígito en la frente de Carolina, de tal modo que ninguna de las niñas puede ver el dígito que ella misma tiene en su frente. Además las niñas están en cubículos con vidrios especiales de tal modo que Ana puede ver a Bety y a Carolina, mientras que Bety sólo puede ver a Carolina y Carolina sólo puede a Bety. El objetivo para cada niña es deducir cuál es el dígito que lleva en la frente. El juez les informa que el número formado por los dígitos que tienen Ana, Bety y Carolina en ese orden es un cuadrado perfecto.
Después de esto Ana dice: "No puedo saber cuál es mi dígito".
En seguida Bety dice: "No puedo saber cuál es mi dígito".
Finalmente, Carolina dice: "Yo si sé cuál es mi dígito".
¿Cuál es el dígito que Carolina tiene en la frente? Explicar.
Después de esto, ¿es posible que Bety sepa cuál es el dígito que tiene en la frente? Explicar.
¿Es posible ahora que Ana sepa cuál es el dígito que tiene en la frente? Justificar su respuesta.

2. Sea ABCD un rectángulo tal que AB = 1cm y BC = 2cm. Sea K el punto medio de AD.

(a) Encontrar la razón en la que se cortan los segmentos BK y AC
(b) Sean L el punto de intersección de AC con BK y M y N los puntos medios de BK y AC, respectivamente. Encontrar el área del triángulo LMN.

3. Un rectángulo ABCD de caucho de m x n se dobla de modo que AB coincide con DC para obtener un cilindro. Luego se un los extremos de este cilindro para formar una llanta. De este modo la llanta tiene mn casillas. Cada una de las casillas de la llanta junto con las cuatro casillas vecinas que comparten un lado con ella forma una figura de cinco casillas, a la que vamos a llamar *cruz*. Encontrar todos los valores de m y n para los cuales la llanta obtenida se puede recubrir con creuces, de manera tal que todas las casillas estén cubiertas por alguna cruz y no haya dos cruces superpuestas.

Segundo día
09 de Junio, 2000

4. En un torneo de fútbol hay 20 equipos, cada uno de los cuales juega exactamente una vez con cada uno de los demás equipos. En cada partido el ganador obtiene 3 puntos, mientras que el perdedor no obtiene puntos, y en caso de empate cada equipo obtiene 1 punto.

(a) Al final del torneo se suman los puntos obtenidos por todos los equipos. ¿Cuáles son todos los posibles valores de este total?
(b) Al final del torneo el equipo campeón obtuvo P puntos. ¿Cuáles son todos los posibles valores que puede tener P?

Nota: El equipo campeón es aquél que obtuvo el mayor puntaje al final y puede suceder que dos o más equipos obtengan el máximo puntaje.

5. (a) ¿Es posible dividir un triángulo equilátero en 4 triángulos equiláteros?
(b) ¿Es posible dividir un triángulo equilátero en 5 triángulos equiláteros?
(c) Demostrar que cualquier triángulo equilátero se puede dividir en n triángulos equiláteros

6. Encontrar el número de formas de escribir enteros no negativos en cada casilla de un tablero de n x n, de modo que la suma de los números en cada fila y cada columna es igual a 3 y en cada fila y en cada columna sólo puede haber uno o dos números diferentes de cero.

I OLIMPIADA BOLIVARIANA DE MATEMATICAS

NIVEL SUPERIOR

Primer día
8 de Junio, 2000

1. (a) Sea ABCD un rectángulo tal que AB = 1cm y BC = 2cm. Sean K el punto medio de AD, L el punto de intersección de AC con BK y M y N los puntos medios de BK y AC, respectivamente. Encontrar el área del triángulo LMN.

(b) Sea ABCD un rectángulo tal que AB = 1cm y BC = *n* cm. Sean C'y D' puntos sobre los segmentos BC y AD, respectivamente, de modo que ABC'D' es un cuadrado y E un punto del segmento BC tal que EC = 1cm. Sean L y M los puntos de intersección de BD' con AC y AE, respectivamente y N el punto de intersección de C'D' y AC. Encontrar el área del triángulo LMN.

2. Un rectángulo ABCD de caucho de *m* x *n* se dobla de modo que AB coincide con DC para obtener un cilindro. Luego se un los extremos de este cilindro para formar una llanta. De este modo la llanta tiene *mn* casillas. Cada una de las casillas de la llanta junto con las cuatro casillas vecinas que comparten un lado con ella forma una figura de cinco casillas, a la que vamos a llamar *cruz*. Encontrar todos los valores de *m* y *n* para los cuales la llanta obtenida se puede recubrir con creuces, de manera tal que todas las casillas estén cubiertas por alguna cruz y no haya dos cruces superpuestas.

3. Sea *n* un entero positivo par. Hallar todas las triplas de números reales (x, y, z) tales que

$$x^n y + y^n z + z^n x = x y^n + y z^n + z x^n$$

Segundo día

09 de Junio, 2000

4. Encontrar todos los enteros positivos a, b, c tales que $ab + bc + ca$ es un número primo y

$$\frac{a+b}{a+c} = \frac{b+c}{b+a}$$

5.

(a) Sean a_1, A_1, a_2, A_2, a_3, A_3 números reales positivos tales que $a_i + A_i = k$, donde k es una constante dada. Demostrar que

$$a_1A_2 + a_2A_3 + a_3A_1 < k^2,$$

(b) Sean a_1, A_1, a_2, A_2, a_3, A_3, a_4, A_4 números reales positivos tales que $a_i + A_i = k$, donde k es una constante dada. Si $a_i \geq A_i$, demostrar que:

$$a_1A_2 + a_2A_3 + a_3A_4 + a_4A_1 \leq k^2,$$

y determinar cuando se tiene la igualdad.

6. Encontrar el número de formas de escribir enteros no negativos en cada casilla de un tablero de n x n, de modo que la suma de los números en cada fila y cada columna es igual a 3 y en cada fila y en cada columna sólo puede haber uno o dos números diferentes de cero.

XLII OLIMPIADA INTERNACIONAL DE MATEMATICAS

Washington, Estados Unidos

Primer día

08 de Julio, 2001

1. Sea ABC un triángulo acutángulo, y O el centro de su circunferencia circunscrita. El punto P del lado BC es el pie de la altura desde A.
Supongamos que $\angle BCA \geq \angle ABC + 30°$
Demostrar que $\angle CAB + \angle COP < 90°$.

2. Demostrar que :

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq 1.$$

para todos los números reales positivos *a*, *b* y *c*.

3. En un concurso de matemáticas participaron 21 mujeres y 21 hombres.

- Cada concursante resolvió como máximo seis problemas.
- Para cada mujer y cada hombre, hay al menos un problema que fue resuelto por ambos.

Demostrar que hay al menos un problema que fue resuelto por al menos tres hombres y tres mujeres.

XI OLIMPIADA MATEMATICA DEL CONO SUR

Montevideo, Uruguay

Primer día

Abril, 2000

1. Diremos que un número es descendente si cada uno de sus dígitos es menor o igual al dígito anterior, de izquierda a derecha. Por ejemplo, 4221 y 751 son números descendentes, mientras que 476 y 455 no son descendentes. Determine si existen enteros positivos *n* para los cuales 16^n es descendente.

2. En un tablero de 8×8 distribuimos los enteros del 1 al 64, uno en cada casilla.
A continuación, se colocan sobre el tablero fichas cuadradas de 2×2, que cubren exactamente cuatro casillas (sin superposiciones) y de modo que los cuatro números cubiertos por cada ficha determinen una suma menor que 100.
Mostrar una distribución de dichos enteros que permita colocar el mayor número de fichas, y demostrar que no es posible obtener una distribución que permita colocar más fichas.

3. Un cuadrado de lado 2 es dividido en rectángulos mediante varias rectas paralelas a los lados (algunas horizontales y otras verticales). Los rectángulos son coloreados alternadamente de negro y blanco, como si fuese un tablero de ajedrez. Si de esta manera el área blanca resultó igual al área negra, demostrar que al recortar los rectángulos negros a lo largo de sus bordes, es posible formar con estos (sin superposiciones) un rectángulo negro de 1×2.

SEGUNDO DIA

4. Sean ABCD un cuadrado (sentido horario) y P un punto cualquiera perteneciente al interior del segmento BC. Se construye el cuadrado APRS (sentido horário). Demostrar que la recta CR es tangente a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC.

5. En el plano cartesiano, considere los puntos de coordenadas enteras. Una operación consiste en:

> Escoger uno de estos puntos y realizar una rotación de 90^o en el sentido anti-horário, con centro en este punto.

¿Es posible, através de una secuencia de dichas operaciones, llevar un triángulo de vértices (0, 0), (1, 0), y (0, 1) a un triángulo de vértices (0, 0), (1, 0) y (1, 1)?

6. ¿Existe un entero positivo divisible por el producto de sus dígitos y tal que dicho produto es mayor que 10^{2000}?