PROBLEMAS PLANTEADOS EN DIVERSAS OLIMPIADAS EN EL MUNDO

1. Las localidades P_1, ..., P_{1983} son atendidas por diez aerolineas internacionales A_1, ..., A_{10}. Se hace notar que hay un servicio directo (sin paradas) entre dos localidades cualquiera y todos los horarios son en ambos sentidos. Pruebe que por lo menos una de las aerolineas puede ofrecer un viaje de ida y vuelta con un número impar de paradas.

2. Sea n un entero positivo. Sea s (n) la suma los divisores naturales de d de n (incluyendo 1 y n). Decimos que un entero m ³ 1 es "superabundante" si " k Î {1, 2, ..., m-1}:

[s (m)]/m > [s (k)]/k

Pruebe que existe un infinito número de numeros "superabundantes".

3. Se dice que un conjunto E de puntos del plano euclidiano es "pitagoriano" si para cualquiera partición de E en dos sub conjuntos A y B, por lo menos uno de los conjuntos contiene el vértice del triángulo rectángulo. Decida si los siguientes conjuntos son o no "pitagorianos".

(a) Un círculo.

(b) Un triángulo equilátero (que es un conjunto de los tres vértices y los puntos de las aristas).

4. En los lados de un triángulo ABC, se construyen un triángulo isósceles similar ABP (AP = PB), AQC (AQ = QC) y BRC (BR = RC). Los dos primeros son construídos externamente al triángulo ABC, pero el tercero esta situado en el mismo semiplano determinado por la línea BC como el triángulo ABC. Probar que APRQ es un paralelogramo.

5. Considerar el conjunto de todos estrictamente en secuencia decreciente de n números naturales teniendo la propiedad que en cada secuencia ningún término divide a otro de la secuencia. Sea A = (a_j) y B = (b_j) cualquiera de las dos secuencias.

Decimos que A precede a B si $a_k < b_k$ y $a_i = b_i$ para i < k. Encontrar los términos de la primera secuencia del conjunto bajo este orden.

6. Suponga que {x_1, x_2, ..., x_n} son enteros positivos para los cuales $x_1 + x_2 + ... + x_n$ = 2(n + 1). Mostrar que existe un entero r con 0 £ r £ n - 1 para lo cual el próximo n - 1 inigualdad se cumple:

x_{r+1} £ 3

$x_{r+1} + x_{r+2}$ £ 5

....

$x_{r+1} + x_{r+2} + ... + x_n$ £ 2(n-r) + 1

....

$x_{r+1} + x_{r+2} + ... + x_n + x_1 + ... + x_i$ £ 2(n + i - r) + 1; (1 £ i < r - 1)

....

$x_{r+1} + x_{r+2} + ... + x_n + x_1 + ... + x_{r-1}$ £ 2(n) - 1;

Probar que si todas las inegualdades son estrictas, r es única, y que de otra manera hay exactamente dos como r.

7. Sea un entero positivo y sea $\{a_n\}$ definido por
$a_0 = 0$
$a_{n+1} = (a_n + 1)a + (a + 1)a_n + 2.\text{Sqrt}\ [a(a + 1)a_n(a_n + 1)]$; $(n = 1, 2, ...)$
Muestre que para cada entero positivo n, a_n es un entero positivo.

8. En una prueba participan 3n estudiantes que están situados en tres filas de n estudiantes cada una. Los estudiantes salen de la sala de prueba uno por uno. Si $N_1(t)$, $N_2(t)$, $N_3(t)$ denotan los números de estudiantes en la primera, secunda y tercera fila respectivamente en el tiempo t, encontrar la probabilidad que para cada t durante la prueba

$$|N_i(t) - N_j(t)| < 2,\ i\ \text{¹}\ j,\ i, j = 1, 2, ...$$

9. Sea p y q > 0 enteros. Mostrar que existe un intervalo I de longitud 1/q y un P con coeficientes enteros tales que:

$$|P(x) - p/q|<1/(q^2)$$

para todo x en I.

10. Sea f : [0,1] ® **R** continuo y que satisface:

f (2x) = b.f (x); 0 £ x £ 1/2,
f (x) = b - (1 - b).f (2x - 1); 1/2 £ x £ 1,

donde b = (1 + c)/(2 + c), c > 0. Show that 0 < f(x) - x < c para cada x, 0 < x < 1.

11. Encontrar todas las funciones de f definidas en los números reales positivos y teniendo un valor real positivo, que satisfacen la condición:
(i) f(xf(y)) = y. f(x) para todos los positivos reales x, y.
(ii) f(x) ® 0 as x ® +¥.

12. Sea E el conjunto de 1983^3 puntos en el espacio $\mathbf{R}^3$ cuyas tres coordinadas son enteros entre 0 y 1982 (incluidos 0 y 1982). Un color de E es un mapa de E al conjunto {rojo, azul}. ¿Cuántos colores de E hay, que satisfacen la siguiente propiedad: El número de vértices rojos entre los 8 vértices de cualquier paralelepípedo (cuyas aristas son 4 por 4 paralelos a los ejes) es un múltiplo de 4.

13. Probar o no que: De un intervalo [1, 30000] uno puede seleccionar un conjunto de 1000 enteros conteniendo tripletes no aritméticos (tres números en una progresión aritmética).

14. Decidir si existe un conjunto M de números naturales que satisfacen la siguiente condición:
(a) Para cualquier número natural m > 1 hay a, b Î M de modo que a + b = m.
(b) Si a, b, c, d Î M; a, b, c, d < 10 y a + b = c + d, luego a = c o a = d.

15. Sea F(n) un conjunto de polinomios:

$$P(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$$

con a_0, a_1, ... ,a_n Î **R** y 0 £ $a_0 = a_n$ £ $a_1 = a_{n-1}$ £ ... £ $a_{[n/2]} = a_{[(n + 1)/2]}$.
Probar que si f Î F(m) y g Î F(n), luego f.g Î F(m + n).

16. Sea P_1, P_2, ..., P_n puntos distintos del plano, n ³ 2. Probar que
Donde P_iP_j es la distancia euclideana entre P_i and P_j.

17. Sea a, b, c enteros positivos que satisfacen (a,b) = (b,c) = (c,a) = 1. Mostrar que 2abc - ab - bc - ca es el entero mas grande no representable como

$$xbc + yca + zab$$

con enteros no negativos x, y, z.

18. Sea $(F_n)_{n ³ 1}$ la secuencia Fibonacci: $F_1 = F_2 = 1$; $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, n ³ 1 y P(x) el polinomio de de grado 990, que verifica:

$$P (k) = F_k \text{ para } k = 992, ..., 1982.$$

Probar que P (1983) = F_{1983} - 1.

19. Resolver el sistemas de ecuaciones:

$$x_1.|x_1| = x_2.|x_2| + (x_1 - a).|x_1 - a|$$
$$x_2.|x_2| = x_3.|x_3| + (x_2 - a).|x_2 - a|$$
$$...................................$$
$$x_n.|x_n| = x_1.|x_1| + (x_n - a).|x_n - a|$$

donde a > 0, en el conjunto de números reales.

20. Encontrar el entero mas grande menor o igual a S $k^{(1/1983 - 1)}$, donde la suma es tomada de k = 1 a k = 2^{1983}

21. Sea n un entero positivo que tiene al menos dos diferentes factores primos. Mostrar que existe una permutación a_1, a_2, ..., a_n de los enteros 1, 2, ..., n tales que:

$$S\ k.\cos((2.p.a_k)/n) = 0$$

donde la suma es tomada de k = 1 a k = n.

22. Si a, b y c son lados de un triángulo, probar que:

$a^2b(a - b) + b^2c(b - c) + c^2a(c - a)$ ³ 0

y determine cuándo hay una igualdad.

23. Sea K una de los dos puntos de interseccion de los círculos W_1 y W_2. O_1 y O_2 son los centros de W_1 y W_2. Las dos tangentes comunes al círculo encuentran a W_1 and W_2 en P_1 y P_2 al primero, y Q_1 y Q_2 al segundo, respectivamente. Sea M_1 y M_2 los puntos medios de P_1Q_1 y P_2Q_2, respectivamente. Probar que Ð O_1KO_2 = Ð M_1KM_2

24. Sea d_n el último dígito no nulo de la representación decimal de n!. Probar que d_n es no periódica. En otras palabras, probar que no hay entero positivo T tal que:

" n ³ n_0: $d_{n+T} = d_n$

25. Una secuencia de enteros es definida por
$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$, (n>1), $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.

Probar que 2^k divide a a_n sí y sólo sí 2^k divide a *n*.

26. Sea n un entero positivo. Encontrar el número de coeficientes impares del polinomio $u_n(x) = (x^2 + x + 1)^n$.

27. El triángulo ABC es inscrito en un círculo. Las bisectrices interiores de los ángulos A, B y C cortan el círculo nuevamente en los puntos A', B' y C', respectivamente. Probar que el área del triángulo A'B'C' es mayor o igual que el área del triángulo ABC.

28. Un tablero de ajedrez de n x n (n ³ 2) es numerado por los números 1, 2, ..., n^2 (todos los números aparecen en alguna casilla). Probar que exiten dos cuadrados vecinos (con un lado en común) tales que los números escritos en ellos difieren en al menos n.

29. Sea n un entero positivo par. Sean $A_1, A_2, ..., A_{n+1}$ conjuntos con n elementos cada uno, tales que cualesquiera dos de ellos tengan exactamente un elemento en común mientras que cada elemento de su unión pertenezca al menos a dos de los conjuntos dados. ¿Para qué valores de n puede uno asignar a cada elemento de la unión uno de los números 0 y 1 de tal manera que cada uno de los conjuntos tenga exactamente n/2 ceros?.

30. En un tetraedro ABCD dado, sean K y L los puntos medios de AB y CD, respectivamente. Probar que cada plano que contiene al segmento KL divide al tetraedro en dos partes de igual volumen.

31. Sea a la mayor raíz positiva de la ecuación $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$. Probar que $[a^{1788}]$ y $[a^{1988}]$ son ambos divisibles por 17. ([x] denota la parte entera de x).

32. Sean $u_1, u_2, ..., u_m$ m vectores en el plano, cada uno de longitud £ 1, con suma igual a cero. Probar que uno puede reordenar $u_1, u_2, ..., u_m$ como una secuencia $v_1, v_2, ..., v_m$ tal que cada suma parcial $v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, ..., v_1 + v_2 + ... + v_m$ tenga longitud menor o igual a Ö5.

33. Sean *a* y *b* dos enteros positivos tales que ab + 1 divide a $a^2 + b^2$. Probar que $(a^2+b^2)/(ab + 1)$ es un cuadrado perfecto.

34. Sea *N* = {1, 2, ..., n}, n ³ 2. Una colección *F* = {A_1, ..., A_t} de subconjuntos A_i Í *N*, i = 1, ..., t, se dice que es separable, si para cada par {x,y} Í *N*, existe un conjunto A_i Î *F* de tal manera que A_i Ç {x,y} contiene sólo un elemento. *F* se dice que se puede cubrir, si cada elemento de *N* es contenido en al menos un conjunto A_i Î *F*. ¿Cuál es el menor valor de t, en función de n, de tal modo que existe un conjunto *F* = {A_1, ..., A_t} el cual es separable y a la vez se puede cubrir?.

35. Una cerradura consiste de tres ruedas, cada una de las cuales puede ser ubicada en 8 posiciones diferentes. Debido a un defecto en el mecanismo, la cerradura se abre si cualesquiera dos de las tres ruedas se encuentren en la posición correcta. ¿Cuál es el menor número de combinaciones que debemos intentar para garantizar que la cerradura será abierta (asumir que la "combinación correcta" no es conocida)?.

36. En un triángulo ABC, se eligan los puntos K Î BC, L Î AC, M Î AB, N Î LM, R Î MK y F Î KL. Si E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6 y E denotan las áreas de los triángulos AMR, CKR, BKF, ALF, BNM, CLN y ABC, respectivamente. Probar que
E ³ $8(E_1E_2E_3E_4E_5E_6)^{1/6}$.

37. En un triángulo rectángulo ABC sea AD la altura relativa a la hipotenusa. La recta que une los incentros de los triángulos ABD y ACD cortan a los lados AB y AC en los puntos K, L, respectivamente. Si E y E_1 denotan las áreas de los triángulos ABC y AKL respectivamente, probar que E/E_1 ³ 2.

38. ¿Para qué valores de n existe un arreglo de n x n con los valores -1, 0 ó 1 en cada una de sus posiciones, de tal manera que las 2n sumas obtenidas por sumar los elementos de las filas y de las columnas sean todas diferentes?.

39. Sea ABC un triángulo acutángulo. Tres rectas L_A , L_B y L_C son construídas pasando por los vértices A, B, C, respectivamente de acuerdo a la siguiente descripción: Sea H el pie de la altura trazada desde el vértice A al lado BC; sea S_A el círculo con diámetro AH; S_A corta a los lados AB y AC en M y N respectivamente, donde M y N son distintos de A; entonces L_A es la recta que pasa por A y es perpendicular a MN. Las rectas L_B y L_C con construídas en forma similar. Probar que L_A, L_B y L_C son concurrentes.

40. Probar que el conjunto solución de la inecuación
S k/(x-k) ³ 5/4; (la suma es tomada desde k = 1 hasta k = 70)

es una unión de intervalos disjuntos cuya suma de longitudes es igual a 1988.

41. En el pentágono convexo ABCDE, los lados BC, CD, DE son iguales. Además cada diagonal es paralela a un lado (AC es paralela a DE, BD es paralela a AE, etc.). Probar que ABCDE es un pentágono regular.

42. Considerar 2 circunferencias concéntricas de radios R y r (R > r) con centro O. Fije un punto P sobre la circunferencia menor y considere la cuerda variable AP de la circunferencia menor. Los puntos B y C se encuentran sobre la circunferencia mayor de tal manera que B, P y C son colineales y BC es perpendicular a AP.
i) Para qué valor (es) de ÐOPA toma la suma $BC^2 + CA^2 + AB^2$ un valor extremo?
ii) ¿Cuáles son las posibles posiciones de los puntos medios U de BA y V de AC cuando ÐOPA varía?

43. Sea f(n) una función definida sobre el conjunto de todos los enteros positivos y tomando sus valores en el mismo conjunto. Suponga que f (f(n) + f(m)) = m + n para todo par de enteros positivos n,m. Encontrar todos los valores posibles para f (1988).

44. Encontrar el menor número natural n tal que, si el conjunto {1, 2, ..., n} es arbitrariamente dividido en dos subconjuntos con intersección vacía, entonces uno de los subconjuntos contiene 3 números distintos tales que el producto de dos de ellos es igual al tercero.

45. Cuarenta y nueve estudiantes resuelven un conjunto de tres problemas. El puntaje para cada problema es un número entero de puntos desde 0 hasta 7. Probar que existen dos estudiantes A y B tales que, para cada problema, A obtenga un puntaje mayor o igual al puntaje obtenido por B.

46. Sea p el producto de dos enteros consecutivos mayores que 2. Probar que no existen los enteros $x_1, x_2, ..., x_p$ que satisfagan la ecuación
S (x_i^2) - (4/(4p+1)).(S $x_i)^2$ = 1
o probar que existen sólo dos valores de p para los cuales existen enteros $x_1, x_2, ..., x_p$ que satisfagan
S (x_i^2) - (4/(4p+1)).(S $x_i)^2$ = 1
donde todas las sumas son tomadas desda i = 1 hasta i = p.

47. Sea Q el centro del círculo inscrito en un triángulo ABC. Probar que para cualquier punto P,
$a(PA)^2 + b(PB)^2 + c(PC)^2 = a(QA)^2 + b(QB)^2 + c(QC)^2 + (a + b + c)(QP)^2$,
donde a=BC, b=CA y c=AB.

48. Sea $\{a_k\}_1^{¥}$ una secuencia de números reales no negativos tales que
$a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2}$ ³ 0 y S a_j £ 1 para todo k = 1, 2, ... ,
donde la suma es tomada desde j=1 hasta j=k. Probar que
0 £ $(a_k - a_{k+1}) < 2/(k^2)$ for all k = 1, 2, ...

49. Una entero positivo es llamado un *número doble* si su representación decimal consiste de un bloque de dígitos que no comienza con cero seguido inmediatamente por un bloque idéntico. Por ejemplo, 360360 es un número doble pero 36036 no lo es. Probar que existen infinitos números dobles los cuales son cuadrados perfectos.

50. Una función *f* definida sobre los enteros positivos (y tomando valores enteros positivos) es dada por:
f(1) = 1, f(3) = 3,
f (2n) = f (n),
f (4n+1) = 2 f(2n+1) - f(n),
f (4n+3) = 3 f(2n+1) - 2f(n),
para todo entero positivo n. Determinar con prueba el número de enteros positivos £ 1988 para los cuales f(n) = n.

51. El triángulo ABC es acutángulo. L es una recta en el plano del triángulo y *u*, *v*, *w* son las longitudes de las perpendiculares desde A, B, C hacia L, respectivamente. Probar que
$u^2\tan A + v^2\tan B + w^2\tan C$ ³ 2 D,
donde D es el área del triángulo, y determinar las rectas L para las cuales la igualdad cumple.

52. La secuencia $\{a_n\}$ de enteros es definida por
$a_1 = 2$, $a_2 = 7$
y
$-1/2 < a_{n+1} - (a_n^2)/(a_{n-1})$ £ 1/2; para n ³ 2.
Probar que a_n es impar para todo n > 1.

53. Un punto M es elegio sobre el lado AC de un triángulo ABC de tal manera que los radios de los círculos inscritos en los triángulos ABM y BMC son iguales. Probar que:
BM^2 = D cot (B/2),
donde D es el área del triángulo ABC.

54. Alrededor de una mesa circular un número par de personas tienen una discusión. Después de un intermedio, ellos se sientan de nuevo en un orden diferente. Probar que existen al menos dos personas tales que el número de participantes sentados entre ellos antes y después del intermedio es el mismo.

55. El entero 9 puede ser escrito como una suma de dos enteros consecutivos: 9 = 4 + 5; sin embargo, 9 puede ser escrito como la suma de (más de uno) enteros positivos consecutivos en exactamente dos maneras, pues 9 = 4 + 5 = 2 + 3 + 4. ¿Existe un entero el cual pueda ser escrito como la suma de 1990 enteros positivos consecutivos y además pueda ser escrito como la suma de (más de uno) enteros positivos consecutivos en exactamente 1990 maneras?.

56. Dados n países con 3 representantes cada uno, m comités A(1), A(2), ..., A(m) serán llamados un ciclo si:

1. cada comité tiene n miembros, uno de cada país,
2. no hay dos comités que tengan el mismo número de miembros,
3. para i = 1, 2, 3, ..., m, el comité A(i) y el comité A(i+1) no tienen miembros en común donde A(m+1) denota A(1),
4. Si 1 < |i-j| < m-1, entonces los comités A(i) y A(j) tienen al menos un miembro en común.

¿Es posible tener un ciclo de 1990 comités con 11 países ?

57. En un círculo 2n - 1 (n ³ 3) puntos diferentes son dados. Encontrar el mínimo número natural N con la propiedad que si cualesquiera N de los puntos dados son coloreados negro, existen dos puntos negros tales que en el interior de uno de los arcos que estos puntos determinan existen exactamente n de los 2n - 1 puntos.

58. En un círculo 2n - 1 (n ³ 3) puntos diferentes son dados, de los cuales n son coloreados de negro. Probar que uno puede encontrar dos puntos negros tales que uno de los dos arcos que estos puntos determinan contiene exactamente n de los 2n - 1 puntos.

59. Asumamos que el conjunto de todos los enteros positivos es descompuesto en r subconjuntos disjuntos A_1 U A_2 U ... U A_r = N. Probar que uno de ellos, digamos A_i, tiene la siguiente propiedad: Existe un entero positivo m tal que para cualquier k uno puede encontrar los números a_1, a_2, ..., a_k en A_i con 0 < a_{j+1} - a_j £ m (1 £ j £ k - 1).

60. Dado el triángulo ABC donde todos los lados tienen diferente longitud, sean G, K y H el centroide, incentro y ortocentro del triángulo, respectivamente. Probar que ÐGKH > 90°.

61. Sea f(0) = f(1) = 0 y f(n+2) = 4^{n+2}.f(n+1) - 16^{n+1}.f(n) + n.2^{n2}, n = 0, 1, 2, 3, ... Probar que los números f(1989), f(1990), f(1991) son divisibles por 13.

62. Dado un entero positivo k, denotemos el cuadrado de la suma de sus dígitos por $f_1(k)$ y sea
$f_{n+1}(k) = f_1 (f_n(k))$.

Determinar el valor de f_{1991} (2^{1990}).

63. El incentro del triángulo ABC es K. El punto medio de AB es C_1 y el de AC es B_1. Las restas C_1K y AC se cortan en B_2, las rectan B_1K and AB se cortan en C_2. Si las áreas de los triángulos AB_2C_2 y ABC so iguales, ¿cuál es la medida del ángulo Ð CAB?.

64. Probar que todo entero k (>1) tiene un múltiplo positivo el cual es menor que k^4 y puede ser escrito en el sistema decimal con a lo más cuatro diferentes dígitos.

65. Sea n un número natural compuesto y p un divisor propio de n. Encontrar la representación binaria de el menor número natural N tal que $((1 + 2^p + 2^{n-p}).N - 1)/ (2^n)$ es un entero.

66. Diez localidades son atendidas por dos aerolíneas internacionales tales que existe un servicio directo (sin escalas) entre cualesquiera dos de dichas localidades y todas las aerolíneas dan servicios en ambos sentidos. Probar que al menos una de las aerolíneas puede ofrecer dos tours circulares disjuntos cubriendo cada uno de ellos un número impar de ciudades.

67. Encontrar todos los enteros positivos n que tengan la propiedad que $(2^n + 1)/(n^2)$ es un entero.

68. Sean a,b,c,d números reales no negativos tales que ab + bc + cd + da = 1. Probar que
$(a^3)/(b + c + d) + (b^3)/(a + c + d) + (c^3)/(a + b + d) + (d^3)/(a + b + c)$ ³ 1/3

69. Sea Q^+ el conjunto de los números racionales positivos. Construir una función f: Q^+ ® Q^+ tal que
f(xf(y)) = (f(x))/y,
para todo x, y en Q^+.

70. Sea P un polinomio cúbico con coeficientes racionales, y sean q_1, q_2, q_3, ... una secuencia de números racionales tales que $q_n = P(q_{n+1})$ para todo n ³ 1. Probar que existe k ³ 1 tales que para todo n ³ 1, $q_{n+k} = q_n$.

71. Encontrar todos los números naturales n para los cuales todo número natural cuya representación decimal tiene n-1 digitos 1 y un dígito 7 es primo.

72. Probar que sobre el plano cartesiano es imposible dibujar una poligonal cerrada tales que

1. las coordenadas de cada vértice son racionales,
2. la longitud de cada lado es igual a 1,
3. la poligonal tiene un número impar de vértices.

73. ¿Puede el número, obtenido al escribir en una fila los números del 1 al n (uno después de otro), presentar los mismos dígitos cuando es leído de izquierda a derecha como cuando es leído de derecha a izquierda?

74. Cierta cantidad de hombres se están moviendo con velocidad constante en una línea recta. Se sabe que un intervalo de tiempo dado la suma de todas las distancias mutuas entre ellos va decreciendo monotónicamente. Probar que la suma de las distancias entre un hombre y cada uno de los otros, en el mismo intervalo de tiempo, también va decreciendo monotónicamente.

75. Probar que al cortar una pirámide cuya base es un polígono regular de n lados, no se puede obtener como sección un polígono regular de (n + 1) lados, donde n ³ 5.

76. Probar que si $a_1, a_2, ..., a_m$ son numeros diferentes de cero y $a_1 + a_2.2^k + a_3.3^k + ... + a_m.m^k = 0$ para cada entero k = 0, 1, ..., n (n < m-1), entonces hay al menos n pares de números vecinos con diferentes signos en la secuencia $a_1, a_2, ..., a_m$
77. Existen tres números naturales, todos ellos mayores que uno, tales que el cuadrado de cada número disminuido en uno, puede ser dividido por cada uno de los otros números?.

78. La bisectriz CD es trazada en un triángulo isósceles ABC (AB = BC). La recta que es perpendicular a CD y pasa por el circuncentro de ABC corta a BC en E. La recta paralela a CD que pasa por el punto E corta a AB en F. Probar que BE = FD.

79. ¿Existe un conjunto finito M de números reales no triviales, tales que para cada número natural n, existe un polinomio de grado no menor que n con coeficientes incluidos en M y donde todas sus raíces también están incluídas en M?.

80. Los enteros del 1 al 100 son escritos en una fila en un orden desconocido. Con una pregunta acerca de 50 números cualesquiera , nosotros podemos saber en que orden relativo uno respecto al otro estos 50 números han sido escritos. Cuántas preguntas deben ser hechas al menos para saber en qué orden han sido escritos los 100 números?.
81. H es el ortocentro de un triángulo agudo ABC, en A, se traza dos tangentes AP y AQ del círculo de cuyo diámetro es BC, los puntos de tangencia son P y Q respectivamente. Probar: P, H, Q son colineares.

82. S={1,2,...,50}. Encontrar el mínimo número natural k, tal que cualquiera k-elemento del subconjunto S, hayan dos diferentes elementos a y b, a+b|ab.

83. La Función F: R a R satisface $F(x^3+y^3)=(x+y)((F(x))^2-F(x)F(y)+(F(y))^2)$, donde x, y son números naturales arbitrarios. Probar: Para número real x, F(1996x)=1996F(x).

84. Ocho cantantes toman parte en un festival artístico. El organizador quiere planear m conciertos. Para cada concierto hay 4 cantantes que salen a escena. Restringir el tiempo para que cada dos cantantes que salgan a escena sea siempre el mismo. Haga un diseño para que m sea el mínimo.

85. Para el número natural n, $X_0=0$, $X_i>0$, i=1,2,..,n, and sum(i=1 to n, X_i)=1. Probar: 1 £ sum(i=1 to n, X_i/(sqr(1+X_0+X_1+...+$X_{(i-1)}$)sqr(Xi+...+Xn))

86. En el triángulo ABC, el ángulo C=90 grados, el ángulo A=30 degrees, BC=1. Encontrar el mínimo valorde todas los lados mas largos en el triángulo inscrito en ABC. Un triángulo inscrito significa que todos los vértices del triángulo pertenecen a los tres lados del triangulo ABC respectivamente.

87. Los números reales X1, X2, ... , X1997 satisfacen:

1. -1/Ö3 £ Xi £ Ö3 (i=1,2,..,1997);
2. $X_1+X_2+...+X_{1997}$= -318 Ö3.

Encontrar el mínimo valor de $X_1^{12}+X_2^{12}+...+X_{1997}^{12}$. Donde Ö3 significa la raiz positiva de 3.

88. Sea $A_1B_1C_1D_1$ un cuadrilátero convexo cualquiera, P es un punto en su interior, y por cualquier vértice del cuadrilátero, la línea que une P y los dos lados del vértice forman dos ángulos que son agudos. Sea A_k, B_k, C_k, D_k los puntos simétricos de P por las líneas $A_{(k-1)}B_{(k-1)}$, $B_{(k-1)}C_{(k-1)}$, $C_{(k-1)}D_{(k-1)}$, $D_{(k-1)}A_{(k-1)}$ respectivamente (k=2,3,...). Piense en la secuencia $A_jB_jC_jD_j$ (j=1,2,...) :

1. Entre los 12 primeros cuadriláteros, ¿Cuál es similar al 1997mo cuadrilátero y cuál no?
2. Suponga que el 1997mo es un cuadrilátero inscrito, ¿Cuál de los 12 cuadriláteros está también inscrito y cuál no?

89. Pruebe que existen infinitos números naturales n, de modo que podamos hacer un arreglo 1,2,3,...,3n como una tabla:

A1 A2 ... An
B1 B2 ... Bn
C1 C2 ... Cn

satisfaga lo siguiente:

1. A1+B1+C1=A2+B2+C2=...=An+Bn+Cn sea divisible por 6;
2. A1+A2+...An=B1+B2+...+Bn=C1+C2+...Cn sea también divisible por 6.

90. El cuadrilátero ABCD es inscrito en un círculo, Las extensiones de las líneas AB y DC interceptan at P, las extensiones de las líneas AD y BC interceptan a Q, trazar las dos tangentes del círculo QE y QF los cuales E, F son sus puntos de tanhencia. Probar que: P, E, F son colineales.

91. A={1,2,3,...,17}. Para un mapeo uno-a-uno de F desde A hasta A. Hacer que F1(x)=F(x), F(k+1)(x)=F(Fk(x)) (k es un número natural) Luego hay un mapeo de uno-a-uno F que satisface que existe un número natural M, el cual:

1. Cuando m < M, 1 £ i £ 16,
   Fm(i+1)-Fm(i)<>1 or -1 (mod 17),
   Fm(1)-Fm(17)<>1 or -1 (mod 17);
2. Cuando 1 £ i £ 16,
   FM(i+1)-FM(i)=1 or -1 (mod 17),
   FM(1)-FM(17)=1 or -1 (mod 17).

Para tales mapeos F, encontrar el máximo valor de M.

92. La secuancia n-positiva A1, A2, ... satisface A_{n+m} £ A_n+A_m, donde m, n son números naturales.
Probar que: Para cualquier n ³ m, An £ mA1+((n/m)-1)Am.

93. En el triángulo dado ABC, el número real t>1. El punto P se mueve sobre el arco BAC del circulo circunscrito. Se extiende BP, CP hasta U, V respectivamente, donde BU=tBA, CV=tCA. Se extiende UV hasta Q, y UQ=tUV. Encontrar el lugar geométrico del punto Q.

94. Hay n equipos de futbol que toman parte en una competencia, cada dos equipos juegan un partido. El ganador de un encuentro consigue 3 puntos, el perdedor consigue 0 puntos. Y en un empate, a cada equipo se le anota 1 punto. Para asegurar que hay mas k-1 equipos cuyo puntaje es no menos que un equipo, ¿Cuántos puntos por lo menos se debe conseguir en la competencia?

95. Encontrar un número natural m, de manera tal que la secuencia integral {Xn}:

1. X0=1, X1=337
2. (X(n+1)X(n-1)-$(Xn)^2$)+(3/4)(X(n-1)+X(n+1)-2Xn)=m sea para cada número natural n.
3. (1/6)(Xn+1)(2Xn+1) es un número cuadrático para cada número natural n.

96. F(x)=sum(i=0 to n, A(2i)($x^{(2n-2i)}$)) es un n-deg polinomio con coeficientes reales. Y

1. Todas las raices de F(x) ie un número imaginario puro.
2. sum(i=0 to n, A(2i)A(2n-2i)) £ ((2n)!/$(n!)^2$)A(0)A(2n)

Encontrar todos los polinomios (x).

97. Para los números naturales n(³ 6), m. X={1,2,...,n} A1,A2,...,Am es un grupo de 5 elementos subconjunto de X.
Si m>n(n-1)(n-2)(n-3)(4n-15)/600, probar que existe 1£ i_1 < i_2 <... < i_6 £ m, tal que |Union(j=1 to 6, A(ij))|=6.

98. Hay 1997 cápsulas de cierta medicina, y en tres frascos A, B y C tanto como 1997, 97, 17 cápsulas respectivamente. Al comienzo todas las cápsulas se colocan en la frasco A, y los tres frascos estan cerrados. Cada cápsula contiene 100 grageas. Cuando un frasco se abre, todas las cápsulas pierden una gragea. Una persona quiere tomar toda la medicina, pero cada día él puede abrir solo un frasco, tomar una cápsula, mover algunas cápsulas dentro de los frascos, y luego cerrarlos. Encontrar el mínimo de grageas que el perderá.

99. Considere el ángulo XOY y P dentro de este ángulo. Trace la linea d pasando por P usando una regla y un compas de manera que el área de OAB es OP^2 donde A y B son las intersecciones de OX y OY con d.

100. Probar que el polinomio $x^4 - 1993x^3 + (1993 + m)x^2 - 11x + m$ tiene al menos una raiz entera.

101. Para todas las permutaciones (a_1, a_2, ... , a_n) del conjunto {1, 2, .. n} donde n es un entero positivo dado, encontrar el valor máximo valor de la suma:
$|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + ... + |a_{n-1} - a_n|$

102. Encontrar el menor entero n > 4 de tal manera que exista un conjunto de personas con las siguientes propiedades:

1. Dos personas cualquiera que son amigos, no tienen amigos en común.

2. Dos personas cualquiera que no son amigos tienen exactamente dos amigos en común.

Asumir que si A tiene a B como su amigo entonces, B también tiene a A como su amigo.

103. Encontrar el valor de la expresión (...(((2*3)*4*5)*...)*1995, donde x * y = (x + y)/(1 + xy) para todo x, y positivos.

104. Considere dos círculos C_1 y C_2 con centros O_1 y O_2 and radii r_1, r_2, respectivamente ($r_2 > r_1$) los cuales se intersectan en A y B tales que O_1AO_2 = 90°. La recta O_1O_2 corta C_1 en C, D y C_2 en E, F, donde E se encuentra entre C y D mientras que D se encuentra entre E y F. La recta BE corta a C_1 en K e intersecta la recta AC en M, mientras que BD corta C_2 en L y AF en N. Probar que:
r_2/r_1 = (KE/LM).(LN/ND)

105. Sean a, b enteros positivos tales que a > b y a+b es par. Probar que las raíces de la ecuación
$x^2 - (a^2 - a + 1)(x - b^2 - 1) - (b^2 + 1)^2 = 0$ son enteros positivos, ninguno de los cuales es un cuadrado perfecto.

106. Sea n un entero positivo y S el conjunto de todos los puntos (x,y) donde x e y son enteros positivos con x £ n, y £ n. Asumamos que T es el conjunto de todos los cuadrados cuyos vértices pertenecen a S. Denotemos por a_k (k ³ 0) el número de pares de puntos en S los cuales son vértices de exactamente k cuadrados de T. Probar que $a_0 = a_2 + 2a_3$.

107. Demuestre que en cualquier triángulo el centro del círculo circunscrito esta cerca del baricentro del triángulo que en el círculo inscrito.

36. Sea p un número primo mayor que 5. Demostrar que el conjunto X = {p - n^2 | n entero y n^2 , p} contiene dos elementos diferentes x e y, diferentes de 1, tal que x divide a y.

108. Sea ABCDE un pentágono convexo y sean M, N, P, Q, S los puntos medios de sus lados nombrados como AB, BC, CD, DE, EA. Si las líneas DM, EN, AP y BQ tienen un punto común entonces este punto pertenece a CS.

109. Apruebe o desapruebe la siguiente declaración: Hay un subconjunto A del conjunto {1, 2, 3, ... , 2^{1996} - 1} con al menos 2012 elementos de tal manera que 1 y 2^{1996} - 1 pertenecen ambos a A, y cada elemento de A \ {1} es la suma de dos, (no necesariamente distintos) de A.

110. Sea *O* un punto interior de un cuadrilátero convexo *ABCD* de manera que satisfaga
$OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = 2S(ABCD)$
Donde *S(ABCD)* denota el área de *ABCD*. Demuestre que *ABCD* es un cuadrado con centro *O*.

120. Sea *A* = {A_1, A_2, ... , A_k}, (k>1), una colección de subconjuntos de un *n-set S* tal que para cualquiera *x, y* Î S hay un A_i Î *A* tal que *x* Î A_i y *y* Î A_i or *x* Î A^i y *y* Î A_i.
Demuestre que *K* ³ [$\log_2$ *n*].

121. Tres círclulos G, C_1 y C estan dados en un plano. C_1 y C_2 tangente G internamente en los puntos B y C, respectivamente. Además C_1 y C_1 tangentes una a la otra externamente a un punto D. Sea A un punto en el cual una tangente común de C_1 y C_2 intersecta G. Señalado por M hay un segundo punto de intersección de la línea AB y el cículo C_1 y por N el segundo punto de intersección de la línea AC y el círculo C_2. También señalado por K y L un segundo punto de intersecciónde la línea BC con C_1 y C_2, respectivamente. Demuestre que las líneas AD, MK y NL son concurrentes.

122. Encontrar todas las funciones f : **R** ® **R** tal que $f(xf(x) + f(y)) = (f(x))^2 + y$ valga para todos los x e y.

123. Demuestre que en cualquier triángulo el centro del círculo circunscrito esta cerca del baricentro del triángulo que en el círculo inscrito.

124. Sea p un número primo mayor que 5. Demostrar que el conjunto X = {p - n^2 | n entero y n^2 , p} contiene dos elementos diferentes x e y, diferentes de 1, tal que x divide a y.

125. Sea ABCDE un pentágono convexo y sean M, N, P, Q, S los puntos medios de sus lados nombrados como AB, BC, CD, DE, EA. Si las líneas DM, EN, AP y BQ tienen un punto común entonces este punto pertenece a CS.

126. Halle todas las ternas de enteros (a,b,c) tales que:
a + b + c = 24
$a^2 + b^2 + c^2 = 210$
abc = 240
Fundamente su respuesta.

127. Sea P un punto interior del triángulo equilátero ABC tal que:
PA = 5, PB = 7, y PC = 8
Halle la longitud de un lado del triángulo ABC.

128. A cada entero positivo n se asigna un entero no negativo F(n) de tal manera que se satisfagan las siguientes condiciones:

(i) f(rs) = f(r) + f(s)
(ii) f(n) = 0, siempre que la cifra en las unidades n sea 3.
(iii) f(10) es cero.

Halle f(1985).Justifique su respuesta.