PROBLEMAS A CONSIDERACION DEL JURADO DE LA OLIMPIADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICAS

24° Olimpiada, Francia, 1983
29º Olimpiada, Australia, 1988
30º Olimpiada, Alemania, 1989
31º Olimpiada, China, 1990
36º Olimpiada, Canadá, 1995

LISTA CORTA DE PROBLEMAS PARA LA 29° IMO

Francia, 1983

Problema 1. (AUS 1)

Las localidades P_1, ..., P_{1983} son atendidas por diez aerolíneas internacionales A_1, ..., A_{10}. Se hace notar que hay un servicio directo (sin paradas) entre dos localidades cualquiera y todos los horarios son en ambos sentidos. Pruebe que por lo menos una de las aerolineas puede ofrecer un viaje de ida y vuelta con un número impar de paradas.

Problema 2. (BEL 1)

Sea n un entero positivo. Sea σ (n) la suma los divisores naturales de d de n (incluyendo 1 y n). Decimos que un entero $m \geq 1$ es "superabundante" si $\forall$ k $\in$ {1, 2, ..., m-1}:

$$[\sigma (m)]/m > [\sigma (k)]/k$$

Pruebe que existe un infinito número de números "superabundantes".

Problema 3. (BEL 3)

Se dice que un conjunto E de puntos del plano euclidiano es "pitagoriano" si para cualquiera partición de E en dos sub conjuntos A y B, por lo menos uno de los conjuntos contiene el vértice del triángulo rectángulo. Decida si los siguientes conjuntos son o no "pitagorianos".

- (a) Un círculo.
- (b) Un triángulo equilátero (que es un conjunto de los tres vértices y los puntos de las aristas).

Problema 4. (BEL 5)

En los lados de un triángulo ABC, se construyen un triángulo isósceles similar ABP (AP = PB), AQC (AQ = QC) y BRC (BR = RC). Los dos primeros son construídos externamente al triángulo ABC, pero el tercero esta situado en el mismo semiplano determinado por la línea BC como el triángulo ABC. Probar que APRQ es un paralelogramo.

Problema 5. (BRA 1)

Considerar el conjunto de todos estrictamente en secuencia decreciente de n números naturales teniendo la propiedad que en cada secuencia ningún término divide a otro de la secuencia. Sea A = (a_j) y B = (b_j) cualquiera de las dos secuencias.
Decimos que A precede a B si $a_k < b_k$ y $a_i = b_i$ para $i < k$. Encontrar los térmiinos de la primera secuencia del conjunto bajo este orden.

Problema 6. (CAN 2)

Suponga que $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ son enteros positivos para los cuales $x_1 + x_2 + ... + x_n = 2(n$

+ 1). Mostrar que existe un entero r con $0 \leq r \leq n - 1$ para lo cual el próximo n - 1 inigualdad se cumple:

$x_{r+1} \leq 3$
$x_{r+1} + x_{r+2} \leq 5$
....
$x_{r+1} + x_{r+2} + ... + x_n \leq 2(n-r) + 1$
....
$x_{r+1} + x_{r+2} + ... + x_n + x_1 + ... + x_i \leq 2(n + i - r) + 1; (1 \leq i < r - 1)$
....
$x_{r+1} + x_{r+2} + ... + x_n + x_1 + ... + x_{r-1} \leq 2(n) - 1;$

Probar que si todas las inegualdades son estrictas, luego r es única, y que de otra manera hay exactamente dos como r.

Problema 7. (CAN 5)

Sea un entero positivo y sea $\{a_n\}$ definido por

$a_0 = 0$
$a_{n+1} = (a_n + 1)a + (a + 1)a_n + 2.\mathrm{Sqrt}\ [a(a + 1)a_n(a_n + 1)]; (n = 1, 2, ...)$

Muestre que para cada entero positivo n, a_n es un entero positivo.

Problema 8. (ESP)

En una prueba participan 3n estudiantes que están situados en tres filas de n estudiantes cada una. Los estudiantes salen de la sala de prueba uno por uno. Si $N_1(t)$, $N_2(t)$, $N_3(t)$ denotan los números de estudiantes en la primera, secunda y tercera fila respectivamente en el tiempo t, encontrar la probabilidad que para cada t durante la prueba

$$|N_i(t) - N_j(t)| < 2, i \neq j, i, j = 1, 2, ...$$

Problema 9. (FIN 1)

Sea p y q > 0 enteros. Mostrar que existe un intervalo I de longitud 1/q y un P con coeficientes enteros tales que:

$$|P(x) - p/q|<1/(q^2)$$

para todo x en I.

Problema 10. (FIN 2')

Sea $f : [0,1] \rightarrow \mathbf{R}$ continuo y que satisface:

$$f(2x) = b.f(x);\ 0 \le x \le 1/2,$$
$$f(x) = b - (1 - b).f(2x - 1);\ 1/2 \le x \le 1,$$

donde $b = (1 + c)/(2 + c)$, $c > 0$. Show that $0 < f(x) - x < c$ para cada x, $0 < x < 1$.

Problema 11. (UKG 4)

Encontrar todas las funciones de f definidas en los números reales positivos y teniendo un valor real positivo, que satisfacen la condición:

- (i) $f(xf(y)) = y.f(x)$ para todos los positivos reales x, y.
- (ii) $f(x) \to 0$ as $x \to +\infty$.

Problema 12. (LUX 2)

Sea E el conjunto de 1983^3 puntos en el espacio $\mathbf{R}^3$ cuyas tres coodinadas son enteros entre 0 y 1982 (incluidos 0 y 1982). Un color de E es un mapa de E al conjunto {rojo, azul}. ¿Cuántos colores de E hay, que satisfacen la siguiente propiedad: El número de vértices rojos entre los 8 vértices de cualquier paralelepípedo (cuyas aristas son 4 por 4 paralelos a los ejes) es un multiplo de 4.

Problema 13. (POL 2)

Probar o no que: De un intervalo [1, 30000] uno puede seleccionar un conjunto de 1000 enteros conteniendo tripletes no aritméticos (tres números en una progresión aritmética).

Problema 14. (POL 3)

Decidir si existe un conjunto M de números naturales que satisfacen la siguiente condición:

- (a) Para cualquier número natural $m > 1$ hay $a, b \in M$ de modo que $a + b = m$.
- (b) Si $a, b, c, d \in M$; $a, b, c, d < 10$ y $a + b = c + d$, luego $a = c$ o $a = d$.

Problema 15. (DDR 1)

Sea F(n) un conjunto de polinomios:

$$P(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$$

con $a_0, a_1, ... ,a_n \in \mathbf{R}$ y $0 \le a_0 = a_n \le a_1 = a_{n-1} \le ... \le a_{[n/2]} = a_{[(n + 1)/2]}$.

Probar que si $f \in F(m)$ y $g \in F(n)$, luego $f.g \in F(m + n)$.

Problema 16. (DDR 3)

Sea $P_1, P_2, ..., P_n$ puntos distintos del plano, $n \ge 2$. Probar que

$$\max_{1 \le i < j \le n} P_iP_j > \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{n} - 1\right) \min_{1 \le i < j \le n} P_iP_j$$

Donde P_iP_j es la distancia euclideana entre P_i and P_j.

Problema 17. (RFA 3)

Sea a, b, c enteros positivos que satisfacen (a,b) = (b,c) = (c,a) = 1. Mostrar que 2abc - ab - bc - ca es el entero mas grande no representable como

$$xbc + yca + zab$$

con enteros no negativos x, y, z.

Problema 18. (ROM 1)

Sea $(F_n)_{n \geq 1}$ la secuencia Fibonacci: $F_1 = F_2 = 1$; $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $n \geq 1$ y P(x) el polinomio de de grado 990, que verifica:

$$P(k) = F_k \text{ para } k = 992, ..., 1982.$$

Probar que $P(1983) = F_{1983} - 1$.

Problema19. (ROM 3)

Resolver el sistemas de ecuaciones:

$$\begin{gathered}
x_1.|x_1| = x_2.|x_2| + (x_1 - a).|x_1 - a| \\
x_2.|x_2| = x_3.|x_3| + (x_2 - a).|x_2 - a| \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n.|x_n| = x_1.|x_1| + (x_n - a).|x_n - a|
\end{gathered}$$

donde a > 0, en el conjunto de números reales.

Problema 20. (SWE 3)

Encontrar el entero mas grande menor o igual a $\Sigma\, k^{(1/1983 - 1)}$, donde la suma es tomada de k = 1 a $k = 2^{1983}$

Problema 21. (SWE 4)

Sea n un entero positivo que tiene al menos dos diferentes factores primos. Mostrar que existe una permutación $a_1, a_2, ..., a_n$ de los enteros 1, 2, ..., n tales que:

$$\Sigma\, k.\cos((2.\pi.a_k)/n) = 0$$

donde la suma es tomada de k = 1 a k = n.

Problema 22. (USA 3)

Si a, b y c son lados de un triángulo, probar que:

$$a^2b(a - b) + b^2c(b - c) + c^2a(c - a) \geq 0$$

y determine cuándo hay una igualdad.

Problema 23. (USR 1)

Sea K una de los dos puntos de interseccion de los círculos W_1 y W_2. O_1 y O_2 son los centros de W_1 y W_2. Las dos tangentes comunes al círculo encuentran a W_1 and W_2 en P_1 y P_2 al primero, y Q_1 y Q_2 al segundo, respectivamente. Sea M_1 y M_2 los puntos medios de P_1Q_1 y P_2Q_2, respectivamente. Probar que $\angle O_1KO_2 = \angle M_1KM_2$

Problema 24. (USR 2)

Sea d_n el último dígito no nulo de la representación decimal de n!. Probar que d_n es no periódica. En otras palabras, probar que no hay entero positivo T tal que:

$$\forall\ n \geq n_0\colon d_{n+T} = d_n$$

LISTA CORTA DE PROBLEMAS PARA LA 29° IMO

Australia, 1988

Problema 1. (BUL 1)

Una secuencia de enteros es definida por

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}, (n>1), a_0 = 0, a_1 = 1.$$

Probar que 2^k divide a a_n sí y sólo sí 2^k divide a n.

Problema 2. (BUL 3)

Sea n un entero positivo. Encontrar el número de coeficientes impares del polinomio

$$u_n(x) = (x^2 + x + 1)^n.$$

Problema 3. (CAN 1)

El triángulo ABC es inscrito en un círculo. Las bisectrices interiores de los ángulos A, B y C cortan el círculo nuevamente en los puntos A', B' y C', respectivamente. Probar que el área del triángulo A'B'C' es mayor o igual que el área del triángulo ABC.

Problema 4. (CZE 1)

Un tablero de ajedrez de n x n ($n \geq 2$) es numerado por los números 1, 2, ..., n^2 (todos los números aparecen en alguna casilla). Probar que exiten dos cuadrados vecinos (con un lado en común) tales que los números escritos en ellos difieren en al menos n.

Problema 5. (CZE 2)

Sea n un entero positivo par. Sean $A_1, A_2, ..., A_{n+1}$ conjuntos con n elementos cada uno, tales que cualesquiera dos de ellos tengan exactamente un elemento en común mientras que cada elemento de su unión pertenezca al menos a dos de los conjuntos dados. ¿Para qué valores de n puede uno asignar a cada elemento de la unión uno de los números 0 y 1 de tal manera que cada uno de los conjuntos tenga exactamente n/2 ceros?.

Problema 6. (CZE 3)

En un tetraedro ABCD dado, sean K y L los puntos medios de AB y CD, respectivamente. Probar que cada plano que contiene al segmento KL divide al tetraedro en dos partes de igual volumen.

Problema 7. (FRA 2)

Sea a la mayor raíz positiva de la ecuación $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$. Probar que $[a^{1788}]$ y $[a^{1988}]$ son ambos divisibles por 17. ([x] denota la parte entera de x).

Problema 8. (FRA 3)

Sean $u_1, u_2, ..., u_m$ m vectores en el plano, cada uno de longitud ≤ 1, con suma igual a cero. Probar que uno puede reordenar $u_1, u_2, ..., u_m$ como una secuencia $v_1, v_2, ..., v_m$ tal que cada suma parcial v_1, $v_1 + v_2$, $v_1 + v_2 + v_3$, ..., $v_1 + v_2 + ... + v_m$ tenga longitud menor o igual a $\sqrt{5}$.

Problema 9. (FRG 1)

Sean a y b dos enteros positivos tales que ab + 1 divide a $a^2 + b^2$. Probar que $(a^2 + b^2)/(ab + 1)$ es un cuadrado perfecto.

Problema 10. (GDR 1)

Sea $N = \{1, 2, ..., n\}$, $n \geq 2$. Una colección $F = \{A_1, ..., A_t\}$ de subconjuntos $A_i \subseteq N$, i = 1, ..., t, se dice que es separable, si para cada par $\{x,y\} \subseteq N$, existe un conjunto $A_i \in F$ de tal manera que $A_i \cap \{x,y\}$ contiene sólo un elemento. F se dice que se puede cubrir, si cada elemento de N es contenido en al menos un conjunto $A_i \in F$. ¿Cuál es el menor valor de t, en función de n, de tal modo que existe un conjunto $F = \{A_1, ..., A_t\}$ el cual es separable y a la vez se puede cubrir?.

Problema 11. (GDR 3)

Una cerradura consiste de tres ruedas, cada una de las cuales puede ser ubicada en 8 posiciones diferentes. Debido a un defecto en el mecanismo, la cerradura se abre si cualesquiera dos de las tres ruedas se encuentren en la posición correcta. ¿Cuál es el menor número de combinaciones que debemos intentar para garantizar que la cerradura será abierta (asumir que la "combinación correcta" no es conocida)?.

Problema 12. (GRE 2)

En un triángulo ABC, se eligan los puntos $K \in BC$, $L \in AC$, $M \in AB$, $N \in LM$, $R \in MK$ y $F \in KL$. Si E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6 y E denotan las áreas de los triángulos AMR, CKR, BKF, ALF, BNM, CLN y ABC, respectivamente. Probar que

$$E \geq 8(E_1E_2E_3E_4E_5E_6)^{1/6}.$$

Problema 13. (GRE 3)

En un triángulo rectángulo ABC sea AD la altura relativa a la hipotenusa. La recta que une los incentros de los triángulos ABD y ACD cortan a los lados AB y AC en los puntos K, L, respectivamente. Si E y E_1 denotan las áreas de los triángulos ABC y AKL respectivamente, probar que $E/E_1 \geq 2$.

Problema 14. (HUN 1)

¿Para qué valores de n existe un arreglo de n x n con los valores -1, 0 ó 1 en cada una de sus posiciones, de tal manera que las 2n sumas obtenidas por sumar los elementos de las filas y de las columnas sean todas diferentes?.

Problema 15. (ICE 1)

Sea ABC un triángulo acutángulo. Tres rectas L_A , L_B y L_C son construídas pasando por los vértices A, B, C, respectivamente de acuerdo a la siguiente descripción: Sea H el pie de la altura trazada desde el vértice A al lado BC; sea S_A el círculo con diámetro AH; S_A corta a los lados AB y AC en M y N respectivamente, donde M y N son distintos de A;

entonces L_A es la recta que pasa por A y es perpendicular a MN. Las rectas L_B y L_C con construídas en forma similar. Probar que L_A, L_B y L_C son concurrentes.

Problema 16. (IRE 1)

Probar que el conjunto solución de la inecuación

$$\Sigma\ k/(x-k) \geq 5/4; \text{ (la suma es tomada desde } k = 1 \text{ hasta } k = 70)$$

es una unión de intervalos disjuntos cuya suma de longitudes es igual a 1988.

Problema 17. (ISA 2)

En el pentágono convexo ABCDE, los lados BC, CD, DE son iguales. Además cada diagonal es paralela a un lado (AC es paralela a DE, BD es paralela a AE, etc.). Probar que ABCDE es un pentágono regular.

Problema 18. (LUX 1)

Considerar 2 circunferencias concéntricas de radios R y r (R > r) con centro O. Fije un punto P sobre la circunferencia menor y considere la cuerda variable AP de la circunferencia menor. Los puntos B y C se encuentran sobre la circunferencia mayor de tal manera que B, P y C son colineales y BC es perpendicular a AP.

- i) Para qué valor (es) de $\angle OPA$ toma la suma $BC^2 + CA^2 + AB^2$ un valor extremo?
- ii) ¿Cuáles son las posibles posiciones de los puntos medios U de BA y V de AC cuando $\angle OPA$ varía?

Problema 19. (MEX 1)

Sea f(n) una función definida sobre el conjunto de todos los enteros positivos y tomando sus valores en el mismo conjunto. Suponga que $f(f(n) + f(m)) = m + n$ para todo par de enteros positivos n,m. Encontrar todos los valores posibles para f (1988).

Problema 20. (MON 4)

Encontrar el menor número natural n tal que, si el conjunto {1, 2, ..., n} es arbitrariamente dividido en dos subconjuntos con intersección vacía, entonces uno de los subconjuntos contiene 3 números distintos tales que el producto de dos de ellos es igual al tercero.

Problema 21. (POL 4)

Cuarenta y nueve estudiantes resuelven un conjunto de tres problemas. El puntaje para cada problema es un número entero de puntos desde 0 hasta 7. Probar que existen dos estudiantes A y B tales que, para cada problema, A obtenga un puntaje mayor o igual al puntaje obtenido por B.

Problema 22. (ROK 2)

Sea p el producto de dos enteros consecutivos mayores que 2. Probar que no existen los enteros $x_1, x_2, ..., x_p$ que satisfagan la ecuación

$$\Sigma (x_i^2) - (4/(4p+1)).(\Sigma x_i)^2 = 1$$

o probar que existen sólo dos valores de p para los cuales existen enteros $x_1, x_2, ..., x_p$ que satisfagan

$$\Sigma (x_i^2) - (4/(4p+1)).(\Sigma x_i)^2 = 1$$

donde todas las sumas son tomadas desda i = 1 hasta i = p.

Problema 23. (SIN 2)

Sea Q el centro del círculo inscrito en un triángulo ABC. Probar que para cualquier punto P,

$$a(PA)^2 + b(PB)^2 + c(PC)^2 = a(QA)^2 + b(QB)^2 + c(QC)^2 + (a + b + c)(QP)^2,$$

donde a=BC, b=CA y c=AB.

Problema 24. (SWE 2)

Sea $\{a_k\}_1^\infty$ una secuencia de números reales no negativos tales que

$$a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2} \geq 0 \text{ y } \Sigma a_j \leq 1 \text{ para todo } k = 1, 2, ... ,$$

donde la suma es tomada desde j=1 hasta j=k. Probar que

$$0 \leq (a_k - a_{k+1}) < 2/(k^2) \text{ for all } k = 1, 2, ...$$

Problema 25. (UNK 1)

Una entero positivo es llamado un *número doble* si su representación decimal consiste de un bloque de dígitos que no comienza con cero seguido inmediatamente por un bloque idéntico. Por ejemplo, 360360 es un número doble pero 36036 no lo es. Probar que existen infinitos números dobles los cuales son cuadrados perfectos.

Problema 26. (UNK 2)

Una función *f* definida sobre los enteros positivos (y tomando valores enteros positivos) es dada por:

$$f(1) = 1, f(3) = 3,$$
$$f(2n) = f(n),$$
$$f(4n+1) = 2 f(2n+1) - f(n),$$
$$f(4n+3) = 3 f(2n+1) - 2f(n),$$

para todo entero positivo n. Determinar con prueba el número de enteros positivos ≤ 1988 para los cuales f(n) = n.

Problema 27. (UNK 4)

El triángulo ABC es acutángulo. L es una recta en el plano del triángulo y *u*, *v*, *w* son las longitudes de las perpendiculares desde A, B, C hacia L, respectivamente. Probar que

$$u^2\tan A + v^2\tan B + w^2\tan C \geq 2\,\Delta,$$

donde Δ es el área del triángulo, y determinar las rectas L para las cuales la igualdad cumple.

Problema 28. (UNK 5)

La secuencia $\{a_n\}$ de enteros es definida por

$$a_1 = 2,\ a_2 = 7$$

y

$$-1/2 < a_{n+1} - (a_n^2)/ (a_{n-1}) \leq 1/2;\ \text{para } n \geq 2.$$

Probar que a_n es impar para todo $n > 1$.

Problema 29. (USA 3)

A number of signal lights are equally spaced along one-way railroad track, labeled in order 1, 2, ..., N ($N \geq 2$). As a safety rule, a train is not allowed to pass a signal if any other train is in motion on the length of track between it and the following signal. However, thers is no limit to the number of trains that can be parked motionless at a signal, one behind the other. (Assume the trains have zero length.)
A series of K freight trains must be driven from Signal 1 to Signal N. Each train travels at a distinct but constant speed at all times when it is not blocked by the safety rule. Show that, regardless of the order in which the trains are arranged, the same time will elapse between the first train's departure from Signal 1 and the last train's arrival at Signal N.

Problema 30. (USS 1)

Un punto M es elegio sobre el lado AC de un triángulo ABC de tal manera que los radios de los círculos inscritos en los triángulos ABM y BMC son iguales. Probar que:

$$BM^2 = \Delta \cot (B/2),$$

donde Δ es el área del triángulo ABC.

Problema 31. (USS 2)

Alrededor de una mesa circular un número par de personas tienen una discusión. Después de un intermedio, ellos se sientan de nuevo en un orden diferente. Probar que existen al menos dos personas tales que el número de participantes sentados entre ellos antes y después del intermedio es el mismo.

LISTA CORTA DE PROBLEMAS PARA LA 31° IMO

China, 1990

Problema 1. (AUS 3)

El entero 9 puede ser escrito como una suma de dos enteros consecutivos: 9 = 4 + 5; sin embargo, 9 puede ser escrito como la suma de (más de uno) enteros positivos consecutivos en exactamente dos maneras, pues 9 = 4 + 5 = 2 + 3 + 4. ¿Existe un entero el cual pueda ser escrito como la suma de 1990 enteros positivos consecutivos y además pueda ser escrito como la suma de (más de uno) enteros positivos consecutivos en exactamente 1990 maneras?.

Problema 2. (CAN 1)

Dados n países con 3 representantes cada uno, m comités A(1), A(2), ..., A(m) serán llamados un ciclo si:

- cada comité tiene n miembros, uno de cada país,
- no hay dos comités que tengan el mismo número de miembros,
- para i = 1, 2, 3, ..., m, el comité A(i) y el comité A(i+1) no tienen miembros en común donde A(m+1) denota A(1),
- Si 1 < |i-j| < m-1, entonces los comités A(i) y A(j) tienen al menos un miembro en común.

¿Es posible tener un ciclo de 1990 comités con 11 países ?

Problema 3'. (CZE 1')

En un círculo 2n - 1 ($n \geq 3$) puntos diferentes son dados. Encontrar el mínimo número natural N con la propiedad que si cualesquiera N de los puntos dados son coloreados negro, existen dos puntos negros tales que en el interior de uno de los arcos que estos puntos determinan existen exactamente n de los 2n - 1 puntos.

Problema 3. (CZE 1)

En un círculo 2n - 1 ($n \geq 3$) puntos diferentes son dados, de los cuales n son coloreados de negro. Probar que uno puede encontrar dos puntos negros tales que uno de los dos arcos que estos puntos determinan contiene exactamente n de los 2n - 1 puntos.

Problema 4. (CZE 2)

Asumamos que el conjunto de todos los enteros positivos es descompuesto en r subconjuntos disjuntos $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r = \mathbb{N}$. Probar que uno de ellos, digamos A_i, tiene la siguiente propiedad: Existe un entero positivo m tal que para cualquier k uno puede encontrar los números $a_1, a_2, \ldots, a_k$ en A_i con $0 < a_{j+1} - a_j \leq m$ ($1 \leq j \leq k - 1$).

Problema 5. (FRA 1)

Dado el triángulo ABC donde todos los lados tienen diferente longitud, sean G, K y H el centroide, incentro y ortocentro del triángulo, respectivamente. Probar que $\angle GKH > 90°$.

Problema 6. (FRG 2)

Two players A and B play a game in which they choose numbers alternately according to the following rule.

At the begining, an initial natural number $n_0 > 0$ is given. Having known n_{2k}, the player A may choose any $n_{2k+1} \in \mathbf{N}$, such that

$$n_{2k} \leq n_{2k+1} \leq (n_{2k})^2$$

Then the player B chooses a number $n_{2k+2} \in \mathbf{N}$ such that

$$(n_{2k+1})/(n_{2k+2}) = p^r$$

where p is a prime number and $r \in \mathbf{N}$.

It is stipulated that, player A wins the game if he (she) succeeds in choose the number 1990, and player B wins if he (she) succeeds in choosing 1.

For which initial n_0 the player A can manage to win the game, for which n_0 player B can manage to win, and for which n_0 players A and B would go to a tie?.

Problema 7. (HEL 2)

Sea $f(0) = f(1) = 0$ y $f(n+2) = 4^{n+2}.f(n+1) - 16^{n+1}.f(n) + n.2^{n2}$, n = 0, 1, 2, 3, ... Probar que los números f(1989), f(1990), f(1991) son divisibles por 13.

Problema 8. (HUN 1)

Dado un entero positivo k, denotemos el cuadrado de la suma de sus dígitos por $f_1(k)$ y sea

$$f_{n+1}(k) = f_1 (f_n(k)).$$

Determinar el valor de $f_{1991} (2^{1990})$.

Problema 9. (HUN 3)

El incentro del triángulo ABC es K. El punto medio de AB es C_1 y el de AC es B_1. Las restas C_1K y AC se cortan en B_2, las rectan B_1K and AB se cortan en C_2. Si las áreas de los triángulos AB_2C_2 y ABC so iguales, ¿cuál es la medida del ángulo $\angle$ CAB?.

Problema 10. (ICE 2)

A plane cuts a right circular cone in two parts. The plane is tangent to the circumference of the base of the cone and passes through the midpoint of the altitude. Find the ratio of the volume of the smaller part to the volume of the whole cone.

Problema 11'. (IND 3')

Given a circle with two chords AB, CD which meet at E. Let M be a pint of chord AB other than E. Draw the circle through D, E and M. The tangent line to the circle DEM at E meets the lines BC, AC at F, G, respectively. Given $(AM/AB) = \lambda$, find (GE/EF).

Problema 11. (IND 3)

Triangle ABC is acute-angled with circumcircle Γ and orthocenter H; also AB $\neq$AC. Let AH meet BC and Γ at D and E, respectively. The tangent to circle (DEF) at D meets the lines AB, AC at M, L, respectively. Prove that MD = DL.

Problema 12. (IRE 1)

Let ABC be a triangle and L the line through C parallel to the side AB. Let be the internal bisector of the angle at A meet the side BC at D and the line L at E and let the internal bisector of the angle at B meet the side AC at F and the line L at G. If GF = DE, prove that AC = BC.

Problema 13. (IRE 2)

An eccentric mathematician has a ladder with n rungs which he always ascends and descends in the following way: when he ascends each step he takes covers b rungs of the ladder, where a and b are fixed positive integers. By a sequence of ascending and descending steps he can climb from ground level to the top rung of the ladder and come back down to ground level again. Find, with proof, the minimum value of n, expressed in terms of a and b.

Problema 14. (JAP 2)

On the coordinate plane a rectangle with vertices (0,0), (m,0), (0,n), (m,n) is given where both m and n are odd integers.
The rectangle is partitioned into triangles in such a way that:

- each triangle in the partition has at least one side (to be called "good" side) which lies on a line of the form x = j or y = k where j and k are integers and the altitude on this side has length 1,
- each "bad" side (i.e. a side of any triangle in the partition which is not a "good" one) is a common side of two triangles in the partition.

Prove that there exist at least two triangles in the partition each of which has two good sides.

Problema 15. (MEX 2)

Determine for which positive integers k, the set

$$X = \{1990, 1990+1, ..., 1990 + k\}$$

can be partitioned into two disjoint subsets A and B such that the sum of the elements of A is equal to the sum of the elements of B.

Problema 16. (NET 1)

Is there a 1990-gon with the following properties (1) and (2)?.

1. All angles are equal;
2. The lengths of the 1990 sides are a permutation of the numers 1^2, 2^2, ..., 1989^2, 1990^2.

Problema 17. (NET 3)

Unit cubes are made into beads by drilling a hole through them along a diagonal. The beads are put on a string in such a way that they can move freely in space under the restriction that the vertices of two neighbooring cubes are touching. Let A be the begin-vertex and B be the end-vertex. Let there be p x q x r cubes on the string ($p, q, r \geq 1$).

1. (a) Determine for which values of p, q and r it is possible to build a block with dimensions p, q and r. Give reasons for your answer.
2. (b) The same question as (a) with the extra condition that A = B.

Problema 18. (NOR)

Let a, b be natural numbers with $1 \leq a \leq b$, and $M = (a + b)/2$. Define the function $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ by

$$f(n) = n + a, \text{ if } n < M$$
$$f(n) = n - b, \text{ if } n \geq M$$

Let $f^1(n) = f(n)$, $f^{i+1}(n) = f(f^i(n))$; i = 1, 2, ... Find the smallest natural number k such that $f^k(0) = 0$

Problema 19. (POL 1)

Let P be a point inside a regular tetrahedron T of unit volume. The four planes passing through P and parallel to the faces of T partition T into 14 pieces. Let f (P) be the joint volume of those pieces which are neither a tetrahedron nor a parallelepiped (i.e., pieces adjacent to an edge but not to a vertex). Find the exact bounds for f (P) as P varies over T.

Problema 20. (POL 3)

Probar que todo entero k (>1) tiene un múltiplo positivo el cual es menor que k^4 y puede ser escrito en el sistema decimal con a lo más cuatro diferentes dígitos.

Problema 21. (ROM 1')

Sea n un número natural compuesto y p un divisor propio de n. Encontrar la representación binaria de el menor número natural N tal que $((1 + 2^p + 2^{n-p}).N - 1)/ (2^n)$ es un entero.

Problema 22. (ROM 4)

Diez localidades son atendidas por dos aerolíneas internacionales tales que existe un servicio directo (sin escalas) entre cualesquiera dos de dichas localidades y todas las aerolíneas dan servicios en ambos sentidos. Probar que al menos una de las aerolíneas puede ofrecer dos tours circulares disjuntos cubriendo cada uno de ellos un número impar de ciudades.

Problema 23. (ROM 5)

Encontrar todos los enteros positivos n que tengan la propiedad que $(2^n + 1)/(n^2)$ es un entero.

Problema 24. (THA 2)

Sean a,b,c,d números reales no negativos tales que $ab + bc + cd + da = 1$. Probar que

$$(a^3)/(b + c + d) + (b^3)/(a + c + d) + (c^3)/(a + b + d) + (d^3)/(a + b + c) \geq 1/3$$

Problema 25. (TUR 4)

Sea Q^+ el conjunto de los números racionales positivos. Construir una función $f: Q^+ \to Q^+$ tal que

$$f(xf(y)) = (f(x))/y,$$

para todo x, y en Q^+.

Problema 26. (USA 2)

Sea P un polinomio cúbico con coeficientes racionales, y sean $q_1, q_2, q_3, \ldots$ una secuencia de números racionales tales que $q_n = P(q_{n+1})$ para todo $n \geq 1$. Probar que existe $k \geq 1$ tales que para todo $n \geq 1$, $q_{n+k} = q_n$.

Problema 27. (USS 1)

Encontrar todos los números naturales n para los cuales todo número natural cuya representación decimal tiene n-1 digitos 1 y un dígito 7 es primo.

Problema 28. (USS 3)

Probar que sobre el plano cartesiano es imposible dibujar una poligonal cerrada tales que

- las coordenadas de cada vértice son racionales,
- la longitud de cada lado es igual a 1,
- la poligonal tiene un número impar de vértices.