RESPUESTAS DE LA XXIX OLIMPIADA ESPAÑOLA

1.- En una reunión hay 201 personas de 5 nacionalidades diferentes. Se sabe que, en cada grupo de 6, al menos dos tienen la misma edad. Demostrar que hay al menos 5 personas del mismo país, de la misma edad y del mismo sexo.

Solución (Mª Gaspar Alonso-Vega)

Si en cada grupo de 6 personas, 2 son de la misma edad, sólo puede haber 5 edades diferentes, ya que, si hubiese 6 edades diferentes, eligiendo una persona de cada edad tendríamos 6 personas de edades distintas contra la hipótesis.

Como $200 = 2 \cdot 100 + 1 \Rightarrow$ al menos hay 101 personas del mismo sexo.

$101 = 5 \cdot 20 + 1 \Rightarrow$ al menos hay 21 personas de la misma edad y sexo.

$21 = 4 \cdot 5 + 1 \Rightarrow$ al menos hay 5 personas de la misma nacionalidad, edad y sexo.

2.- Escrito el triángulo aritmético:

0 1 2 3 4 .... 1991 1992 1993
1 3 5 7 .... 3983 3985
4 8 12 7968
....

donde cada número es la suma de los dos que tiene encima (cada fila tiene un número menos y en la última sólo hay un número). Razonar que el último número es múltiplo de 1993.

Solución.

Si representamos los elementos de la primera fila por a_0, a_1, a_2, ...
los elementos de la segunda serán: $a_0 + a_1$, $a_1 + a_2$, $a_2 + a_3$, ...
los de la tercera serán : $a_0 + 2a_1 + a_1$, $a_1 + 2a_2 + a_3$, ...
para la cuarta : $a_0 + 3a_1 + 3a_1 + a_1$, $a_1 + 3a_2 + 3a_3 + a_4$,............
Supongamos que los dos primeros elementos $b_{p,0}$ y $b_{p,1}$ de la fila p-ésima son:

$$b_{p,0} = \binom{p-1}{0}a_0 + \binom{p-1}{1}a_1 + \ldots\ldots + \binom{p-1}{p-1}a_{p-1} \quad ; \qquad b_{p,1} = \binom{p-1}{0}a_1 + \binom{p-1}{1}a_2 + \ldots\ldots + \binom{p-1}{p-1}a_p$$

entonces, el primer elemento de la fila siguiente será :

$$b_{p+1,0} = \binom{p}{0}a_0 + \binom{p}{1}a_1 + \ldots\ldots + \binom{p}{p}a_p \qquad (*)$$

en nuestro caso la primera fila tiene 1994 elementos, la segunda 1993, ... y la última corresponde a $p + 1 = 1994$ y su único elemento será

$$b_{1994} = \binom{1993}{0} \bullet 0 + \binom{1993}{1} \bullet 1 + \ldots\ldots + \binom{1993}{1993} \bullet 1993$$

Al ser 1993 primo, $\binom{1993}{k}$ es múltiplo de 1993 para todo k menor que 1993 y por tanto b_{1993} es múltiplo de 1993.

3.- Justificar razonadamente que, en cualquier triángulo, el diámetro de la circunferencia inscrita no es mayor que el radio de la circunferencia circunscrita.

Solución (F. Bellot)

La desigualdad propuesta, $R - 2r \geq 0$ es una consecuencia del teorema de Euler. "*Si I, O son el incentro y el circuncentro de un triángulo, r y R los radios de las circunferencias inscrita y circunscritas, se verifica:* $IO^2 = R^2 - 2Rr$".
Entonces $IO^2 = R\,(R - 2r) \geq 0 \Rightarrow R - 2r \geq 0$.

4.- Demostrar que para todo número primo p distinto de 2 y de 5, existen infinitos múltiplos de p de la forma 1111......1 (escrito sólo con unos).

Solución (Alvaro Begué Aguado)

Veamos primero que p tiene infinitos múltiplos de la forma 999...9. Consideremos la sucesión: 9, 99, 999, ...,999...9 (el último tiene n nueves). Entonces se tiene:

$$9 = 10 - 1;\ 99 = 10^2 - 1;\ \ 999 = 10^3 - 1; ....999..9 = 10^n - 1$$

en la sucesión hay infinitos términos de la forma $10^{p-1} - 1$ con $p \neq 2$, $p \neq 5$ y p primo.
Puesto que, por el teorema de Fermat: $10^{p-1} - 1 \equiv 1$ (mód p) si $p \neq 2$, $p \neq 5$ la afirmación queda demostrada.
Finalmente $999...9 = 9 \cdot 111...1$ entonces si p es primo con 9 ($p \neq 3$), p divide al producto, es primo con 9 luego divide a 111...1.
Queda el caso p = 3 que es evidente ya que los infinitos números: 111; 111111, ... son múltiplos de tres.

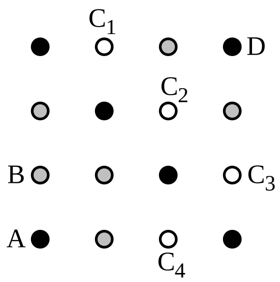
5.- Se dan 16 puntos formando una cuadrícula como en la figura:

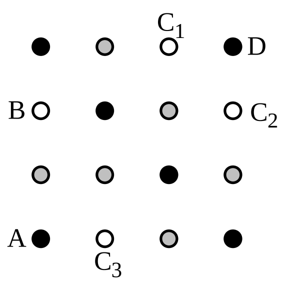
```
   ○   ○   ○   ●  D

   ○   ○   ○   ○

   ○   ○   ○   ○

A  ●   ○   ○   ○
```

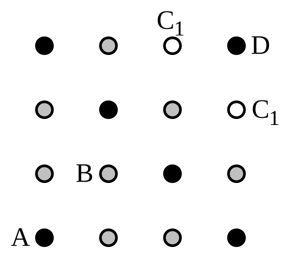
De ellos se han destacado A y D. Se pide fijar de todos los modos posibles otros dos puntos B y C con la condición de que las seis distancias determinadas por los cuatro puntos sean distintas. En ese conjunto de cuaternas, estudiar:
a) Cuántas figuras de 4 puntos existen con las condiciones del enunciado.
b) Cuántas de ellas son geométricamente distintas, es decir, no deducibles unas de otras por transformaciones de igualdad.
c) Si cada punto se designa por un par de enteros (X_i, Y_i), razonar que la suma:
$|X_i - X_j| + |Y_i - Y_j|$ extendida a los seis pares AB, AC, AD, BC, BD, CD es constante.

Solución

El problema admite dos ejes de simetría coincidentes con las diagonales del cuadrado. Clasificaremos las soluciones posibles por la posición del punto B respecto del vértice A. Usaremos coordenadas enteras con origen en A.
Las tres posiciones "fundamentales" (no deducibles unas de otras por las simetrías anteriores) son aquellas en las que B está en los puntos de coordenadas (0,1); (0,2) y (1,1) para cada una de ellas dibujamos us esquema con las posibles posiciones del punto C.
Las posiciones "prohibidas" se dibujan en negro, la posición de B en gris y las de C_i en blanco.
Un criterio general para prohibir ubicaciones es localizar aquellos puntos que estan en la "mediatriz" de dos puntos ya situados. Como A y D son dados y fijos, la diagonal principal siempre contiene puntos "prohibidos"

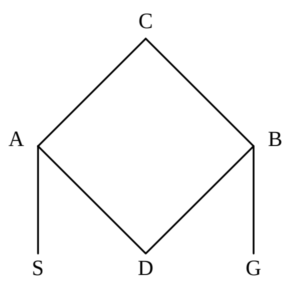






El esquema de la izquierda contiene 4 posiciones "originales" y cada una de ellas genera otras cuatro por aplicación de las dos simetrías, en total 16.
El esquema del centro contiene 3 posiciones "originales" y cada una de ellas genera otras cuatro por aplicación de las dos simetrías, en total 12.
El esquema de la derecha contiene 1 posición "original" que genera otras cuatro por aplicación de las dos simetrías, en total 4.
Por tanto existen 32 posiciones posibles y 8 "originales", esto contesta a los apartados a) y b).
Para el apartado c) hay que suponer que los enteros asignados a cada punto son sus coordenadas en un origen cualquiera, nosotros supondremos que el origen está en A con lo que las coordenadas de A son (0,0) y las de D(3,0).
los seis sumandos corresponden a las parajas AB, AC, AD, BC, BD y CD.
El correspondiente a AD es constante y vale 3+3 = 6.
Los correspondientes a AB y BD valen en conjunto siempre 6 ya que A está en fila inferior y columna izquierda y D en la fila superior y columna derecha.
Por el mismo motivo los sumandos correspondientes a AC y CD valen entre los dos siempre 6.
Sólo queda el sumando $|X_i - X_j| + | Y_i - Y_j|$ correspondiente a BC que por simple comprobación en todos los casos "originales" vale siempre 3.
La suma completa es entonces constante y vale 6 + 6 + 6 + 3 = 21.

6.- Una máquina de juego de un casino tiene una pantalla en la que se ofrece un esquema como el de la figura. Para comenzar el juego aparece una bola en el punto S. A cada impulso que recibe del jugador, esa bola se mueve hasta una de las letras inmediatas con la misma probabilidad para cada una de ellas. La partida termina al ocurrir el primero de los dos hechos siguientes:

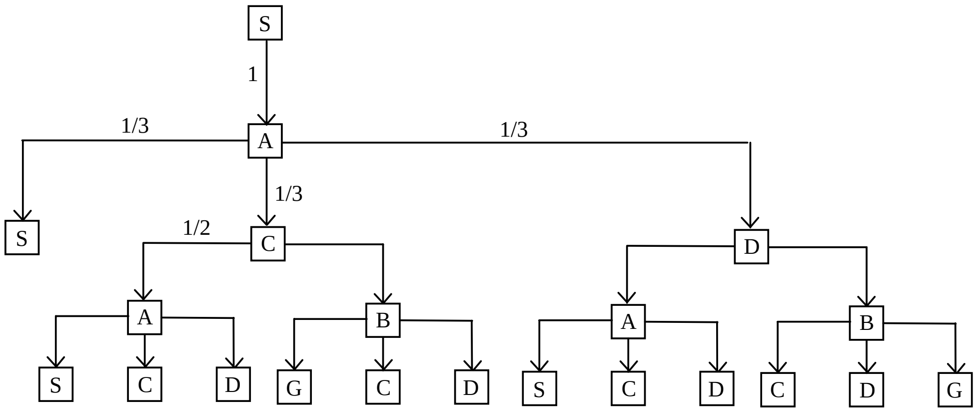


a) La bola vuelve a S y entonces el jugador pierde.
b) La bola llega a G y entonces el jugador gana.

Se pide la probabilidad de que el jugador gane y la duración media de las partidas.

Solución (F. Bellot)

Podemos representar el desarrollo del juego mediante un diagrama en árbol:



La probabilidad de que el juego tenga longitud 2 es $\frac{1}{3}$

La probabilidad de que el juego tenga longitud 4 es :$\frac{1}{3} \bullet \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{3} \bullet 2 \bullet 2 = \frac{2}{3^2}$

La probabilidad de que el juego tenga longitud 6 es :$\frac{1}{3} \bullet \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{3} \bullet 2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet \frac{1}{3} = \frac{2^2}{3^3}$, etc, en general

la probabilidad de que el juego tenga longitud 2n es: $\frac{2^{n-1}}{3^n}$

Entonces, la duración media M de un juego es la suma de cada longitud por la probabilidad respectiva :

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} 2n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n n$$

serie aritmético-geométrica que se suma por el mismo método que la geométrica:

$$M - \frac{2}{3} M = \frac{M}{3} = \frac{2}{3} + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{1 - \frac{2}{3}} = 2 \Rightarrow M = 2 \bullet 3 = 6$$

La probabilidad P de ganar será la suma de las probabilidades de ganar en 4 pasos más la de que gane en 6 pasos ...etc.:

$$P = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2^2}{3^4} + ... = \frac{1}{3}$$

RESPUESTAS DE LA XXX OLIMPIADA ESPAÑOLA

1.- Demostrar que si entre los infinitos términos de una progresión aritmética de números enteros positivos hay un cuadrado perfecto, entonces infinitos términos de la progresión son cuadrados perfectos.

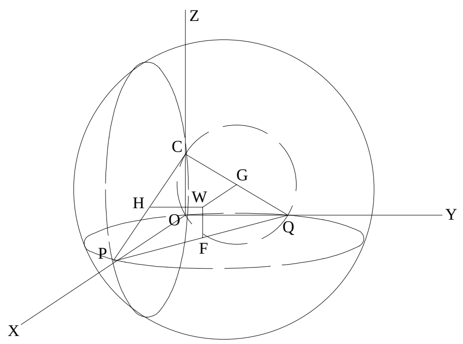
Solución
Bastará probar que a partir de un cuadrado perfecto podemos construir otro. Sea la progresión:

$$a^2,\ a^2 + d,\ a^2 + 2d,\ \ldots\ldots,a^2 + kd\ldots\ldots$$

Como $(a + d)^2 = a^2 + 2ad + d^2 = a^2 + (2a + d)d$, basta tomar $k = 2a + d$ para obtener otro cuadrado en la progresión.

2.- Sea OXYZ un triedro trirectángulo de vértice O y aristas X, Y, Z. Sobre la arista Z se toma un punto fijo C, tal que OC = c. Sobre X e Y se toman respectivamente dos puntos variables P y Q de modo que la suma OP + OQ sea una constante dada k. Para cada par de puntos P y Q, los cuatro puntos O, C, P, Q están en una esfera, cuyo centro W se proyecta sobre el plano OXY. Razonar cuál es el lugar geométrico de esa proyección. Razonar también cuál es el lugar geométrico de W.

Solución
En la figura se muestran con trazo discontínuo las circunferencias que resultan de intersecar la esfera con los planos coordenados. Las proyecciones del centro W de la esfera sobre estos planos coinciden con los centros de estas circunferencias (denotados F, G y H en la figura) y al ser el triedro trirectángulo, F, G y H estan en los puntos medio de los segmentos PQ, QC y CP que son diámetros de sus circunferencias.



Parametrizando con la distancia OP= λ tenemos trivialmente en la referencia OXYZ la siguientes coordenadas:

$$P(\lambda,0,0);\ \ Q(0,k-\lambda,0);\ \ C(0,0,c);$$

$$F\left(\frac{\lambda}{2},\frac{k-\lambda}{2},0\right);\ G\left(0,\frac{k-\lambda}{2},\frac{c}{2}\right);\ \ H\left(\frac{\lambda}{2},0,\frac{c}{2}\right);\ \ W\left(\frac{\lambda}{2},\frac{k-\lambda}{2},\frac{c}{2}\right)$$

El lugar de F es la recta $x + y = \frac{k}{2}$ del plano XOY. El lugar de W es una recta paralela a la anterior situada en el plano $z = \frac{c}{2}$, más concretamente es la intersección de los planos:

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{k}{2} \\ z = \dfrac{c}{2} \end{cases}$$

3.- Una oficina de Turismo va a realizar una encuesta sobre número de días soleados y número de días lluviosos que se dan en el año. Para ello recurre a seis regiones que le transmiten los datos de la siguiente tabla:

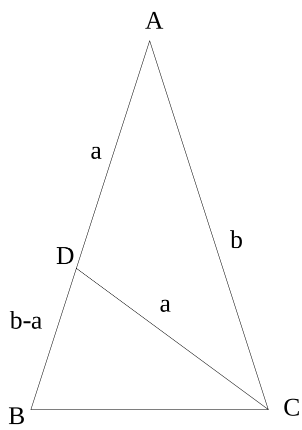
Región	Soleados o lluviosos	Inclasificables
A	336	29
B	321	44
C	335	30
D	343	22
E	329	36
F	330	35

La persona encargada de la encuesta no es imparcial y tiene esos datos más detallados. Se da cuenta de que, prescindiendo de una de las regiones, la observación da un número de días lluviosos que es la tercera parte del de días soleados. Razonar cuál es la región de la que prescindirá.

Solución
Al suprimir una región, la suma de días soleados o lluviosos de las restantes ha de ser múltiplo de 4. Esta suma vale para las seis regiones 1994 que dividido entre 4 da resto 2. El único dato de esta columna que da resto 2 al dividirlo entre 4 es 330 correspondiente a la región F. Suprimiendo esta región quedan entre las cinco restantes 416 días lluviosos y 3·416 = 1248 días soleados.

4.- El ángulo A del triángulo isósceles ABC mide 2/5 de recto, siendo iguales sus ángulos B y C. La bisectriz de su ángulo C corta al lado opuesto en el punto D. Calcular las medidas de los ángulos del triángulo BCD. Expresar la medida a del lado BC en función de la medida b del lado AC, sin que en la expresión aparezcan razones trigonométricas.

Solución
Con los datos del enunciado tenemos:
en el triángulo ABC $\angle$ BAC = 36º; $\angle$ ABC = $\angle$ ACB = 72º
en el triángulo CBD $\angle$ BCD = 36º; $\angle$ CDB = $\angle$ BDC = 72º
en el triángulo ADC $\angle$ DAC = $\angle$ ACD = 72º; $\angle$ ADC = 108º
por tanto ΔBCD y ΔADC son isósceles y ademas ΔBCD es semejante al ΔABC.
Para los lados se tiene: DC = AD = a; BD = b - a.
Expresando la proporcionalidad derivada de la semejanza anterior:



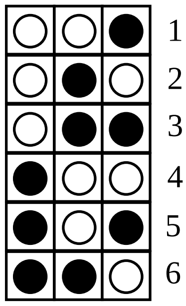
$$\frac{b-a}{a}=\frac{a}{b}\Leftrightarrow a^2=b^2-ab\Leftrightarrow a^2+ab-b^2=0\Leftrightarrow\left(\frac{a}{b}\right)^2+\frac{a}{b}-1=0$$

y resolviendo queda $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Leftrightarrow a=\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)b}{2}$ es decir a es la sección áurea de b.

5.- Con 21 fichas de damas, unas blancas y otras negras, se forma un rectángulo de 3x7. Demostrar que siempre hay cuatro fichas del mismo color situadas en los vértices de un rectángulo.

Solución

Dispondremos el tablero en posición vertical, es decir, con 7 filas y 3 columnas. Asignaremos el color blanco a la cifra 0 y el negro a la cifra 1. De este modo cada fila representa un número escrito en base 2.



En primer lugar es fácil ver que si en una fila se colocan todas las fichas del mismo color, por ejemplo el negro, necesariamente habrá un rectángulo ya que no podemos colocar en ninguna fila dos fichas negras y sólo podemos llenar un máximo de 5 filas en total sin formar rectángulo.
Por otra parte si dos números son iguales sus filas forman rectángulo, luego todas las filas han de representar números distintos. Por la consideración anterior hemos de excluir los números 000 y 111. Con tres cifras en base dos existen $2^3 = 8$ números distintos, quitando los anteriores quedan 6 para 7 filas por lo que necesariamente hemos de repetir y formar rectángulo. El problema tendría solución en un tablero de 3x6 tal como se muestra en la figura.

6.- Un polígono convexo de n lados se descompone en m triángulos, con los interiores disjuntos, de modo que cada lado de esos m triángulos lo es también de otro triángulo contíguo o del polígono dado. Probar que m + n es par. Conocidos n y m hallar el número de lados distintos que quedan en el interior del polígono y el número de vértices distintos que quedan en ese interior.

Solución
Como hay m triángulos, hay 3m lados; de ellos 3m - n son interiores, y como lado interior pertenece a dos triángulos, hay $\frac{3m-n}{2}$ lados interiores distintos. En particular 3m - n es par, luego m y n tienen la misma paridad y m + n es par.
Supongamos que el número de vértices v sólo depende de m y n. Razonemos por inducción sobre v. Si no hay ningún vértice interior (v = 0), uniendo un vértice del polígono con los otros, se divide en n - 2 = n + 2v - 2 triángulos.
Supongamos que hay v vértices interiores y n + 2v - 2 triángulos. Al añadir un vértice hay dos posibilidades:
a) El vértice está en el interior de un triángulo, entonces, para que se cumplan las condiciones del enunciado, debe unirse a cada uno de los tres vértices del triángulo que se divide en tres y el número de triángulos ahora es: n + 2v - 2 + 2 = n + 2(v + 1) - 2.
b) El vértice está en un lado, entonces hay que unirlo con el vértice opuesto de cada uno de los dos triángulos que comparten ese lado, cada triángulo se descompone en dos y el número de triángulos es ahora: n + 2v - 2 + 2 = n + 2(v + 1) - 2.
En conclusión:

$$m = n + 2v - 2 \Rightarrow v = \frac{m-n+2}{2}$$

RESPUESTAS DE LA XXXI OLIMPIADA ESPAÑOLA

1.- Se consideran conjuntos A de cien números naturales distintos, que tengan la propiedad de que si a, b y c son elementos cualesquiera de A (iguales o distintos), existe un triángulo no obtusángulo cuyos lados miden a, b y c unidades.
Se denomina S(A) a la suma de los perímetros considerados en la definición de A. Calcula el valor mínimo de S(A).
Solución:
Si n es el menor de los elementos de A y m el mayor, al tener A cien elementos distintos, será $m \geq n + 99$. Para que el triángulo isósceles de lados n, n, m sea no obtusángulo debe ocurrir que $m^2 \leq 2n^2$; si m es lo menor posible, $m = n + 99$ deberá ser $(n + 99)^2 \leq 2n^2$, o sea:

$$n^2 - 198n - 99^2 \geq 0 \Leftrightarrow n \geq 99 + \sqrt{99^2 + 99^2} \Leftrightarrow n \geq 99\left(1 + \sqrt{2}\right) \Leftrightarrow n \geq 240.$$

Si $n < 240$, es seguro que el conjunto no cumple la condición del enunciado pues

$$m^2 \geq (n+99)^2 \geq 2n^2$$

y el triángulo de lados n, n, m no puede ser no obtuságulo. En particular la condición se cumple para el conjunto:

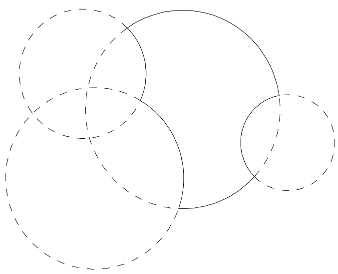
$$A = \{240, 241, 242, ..., 339\}$$

Cualquier otro conjunto que cumpla la condición, tendrá sus elementos respectivamente iguales o mayores que los de éste. Este es, por tanto el que da lugar al mínimo S(A).
El número de triángulos que debe considerarse es el de variaciones ternarias con repetición de los elementos de A, que es $100^3 = 1000000$, con lo que el número de lados en total será de 3000000; de ellos habrá 30000 de longitud 240, otros tantos de longitud 241, etc. Luego

$$S(A) = 30000 \bullet (240 + 241 + 242 + \ldots + 339) = 30000 \bullet \frac{100 \bullet (240 + 339)}{2} = 868500000 \text{ unidades.}$$

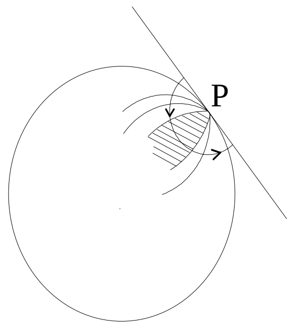
Este es el valor mínimo buscado.

2.- Recortamos varios círculos de papel (no necesariamente iguales) y los extendemos sobre una mesa de modo que haya algunos solapados (con parte interior común), pero de tal forma que no haya ningún círculo dentro de otro.
Prueba que es imposible ensamblar las piezas que resultan de recortar las partes no solapadas y componer con ellas círculos distintos.
Solución:

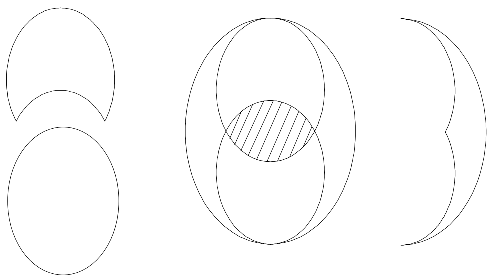


La frontera de las piezas recortadas (que no sean círculos completos) está formada por arcos cóncavos y convexos (vistos desde fuera) que se cortan en puntos que llamaremos vértices. En un vértice pueden concurrir dos arcos cóncavos o uno cóncavo y otro convexo, pero nunca dos convexos ya que éstos únicamente provienen de la frontera de los círculos iniciales. Además, los ángulos que forman los arcos en cada vértice no son de 0º ni de 180º ya que excluimos las tangencias interiores.

Supongamos que tenemos un círculo obtenido ensamblando piezas recortadas. Existe al menos un punto P de la frontera de dicho círculo en el que concurren tres o más arcos de la frontera de las pieza ensambladas (P es vértice de dos o más piezas). La tangente al círculo en P deja a todos los arcos en un mismo semiplano. Elegido un sentido de rotación en P a partir de la tangente, y avanzando en este sentido, el primer arco que encontramos es convexo y el último cóncavo. Por lo tanto es necesario que existan dos arcos consecutivos uno convexo y el otro cóncavo los cuales forman parte de la frontera de una de las piezas ensambladas. Como el arco que forman dichas piezas no puede ser ni 0º ni 180º, el punto P es un vértice de la pieza. Esto es contradictorio pues en ningún vértice pueden concurrir dos arcos convexos vistos desde fuera.



Nota. Hay que entender en el enunciado.que quedan excluidas las tangencias interiores. De no ser así pueden encontrarse contraejemplos como el “despiece” que se muestra en la figura:



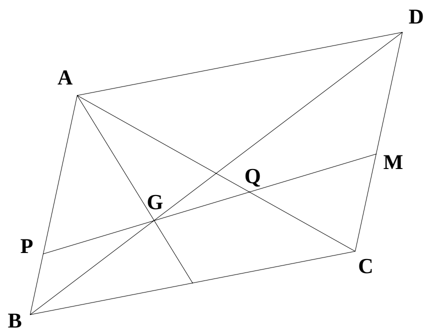
2

3.- Por el baricentro G de un triángulo ABC se traza una recta que corta al lado AB en P y al lado AC en Q. Demuestra que:

$$\frac{PB}{PA} \bullet \frac{QC}{QA} \le \frac{1}{4}$$

Solución:

Dupliquemos el triángulo trazando AD paralela a BC y CD paralela a BA como muestra la figura y tomemos la longitud del lado AB como unidad. Llamando M a la intersección de CD con la recta PQ y x = PB; 1-x = AP, tenemos:



Por semejanza de ΔAQP y ΔQMC: $\frac{QC}{QA} = \frac{MC}{AP} = \frac{MC}{1-x}$

Por semejanza de ΔGPB y ΔGMD: $\frac{PB}{MD} = \frac{GB}{GD} = \frac{1}{2}$.

Luego: MD = 2x y MC = 1 - 2x.
Sustituyendo en el primer miembro de la relación del enunciado queda:

$$\frac{PB}{PA} \bullet \frac{QC}{QA} \le \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{x(1-2x)}{(1-x)^2} \le \frac{1}{4} \Leftrightarrow 9x^2 - 6x + 1 \ge 0 \Leftrightarrow (3x-1)^2 \ge 0$$

Relación válida para cualquier x.
La igualdad se alcanza para $PB = x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow MC = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$ PQ paralela al lado BC.

4.- Halla las soluciones enteras de la ecuación:

$$p\cdot(x + y) = x\cdot y$$

siendo p un número primo.

Solución:

Ya que p es primo, $p \neq 0$ y $p \neq 1$. De la ecuación resulta que p divide a x o p divide a y. Como la ecuación es simétrica respecto de x e y, si (α, β) es solución, también lo será (β, α).
Si p divide a x, $x = p\cdot a$, $(a \in Z)$ la ecuación se puede poner como:

$$p(pa + y)) = pay \Rightarrow pa + y = ay \Rightarrow y = \frac{pa}{a-1} \quad \text{ya que a es entero}$$

además a y a - 1 son primos entre sí, luego a - 1 divide a p. Al ser p primo sólo hay cuatro posibilidades: $a - 1 = \pm 1$ y $a - 1 = \pm p$.
Examinemos todos los casos.

i) $a - 1 = -1$, entonces $a = 0$, $x = 0$, $y = 0$

ii) $a - 1 = 1$, entonces $a = 2$, $x = 2p \Rightarrow y = \frac{2p}{2-1} = 2p$.

iii) $a - 1 = p$, entonces $a = p + 1$, $x = p(p + 1) \Rightarrow y = \frac{p(p+1)}{p+1-1} = p + 1$.

iiii) $a - 1 = -p$, entonces $a = 1 - p$, $x = p(1 - p) \Rightarrow y = \frac{p(1-p)}{1-p-1} = p - 1$.

En resumen las soluciones son: (0, 0); (2p, 2p); (p(p+1), p+1); (p(1-p), p-1); y por la simetría añadimos (p+1, p(p+1)); (p-1, p(1-p)).

RESPUESTAS DE LA XXXII OLIMPIADA ESPAÑOLA

os naturales a y b son tales que: $\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}$ es entero. Demostrar que el máximo común divisor de a y b no es mayor que $\sqrt{a+b}$

Solución:

Se tiene:

$$\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}=\frac{a^2+b^2+a+b}{ab}.$$

Sea d = m.c.d (a,b). Como ab es divisible por d^2, entonces a^2+b^2+ab es divisible por d^2 y también lo son a^2+b^2 y $a+b$, y al ser a y b naturales, se tiene :

$$a+b\geq d^2 \Leftrightarrow \sqrt{a+b}\geq d$$

2.- Sea G el baricentro del triángulo ABC. Si se verifica:

$$AB + GC = AC + GB$$

demostrar que el triángulo es isósceles.

Solución:

Primera solución.

Teniendo en cuenta el teorema de la mediana, la relación del enunciado se escribe:

$$c-b=\frac{2}{3}\left(\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}-\frac{b^2}{4}}-\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}}\right),$$

multiplicando y dividiendo por la expresión conjugada queda:

$$c-b=\frac{2}{3}\frac{\frac{3}{4}\left(c^2-b^2\right)}{m_c+m_b}\Leftrightarrow (c-b)\left(m_c+m_b-\frac{c+b}{2}\right)=0$$

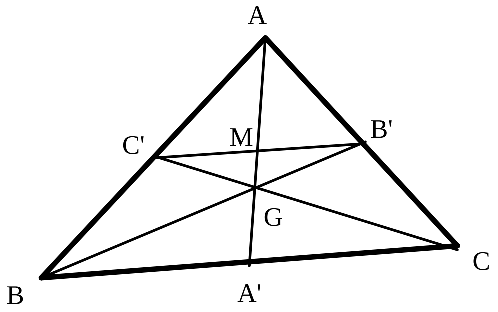
Probaremos que el segundo factor es positivo, de donde se deduce la conclusión.

Llamando B’ y C’ a los puntos medios de AC y Ab respectivamente, en los triángulos CC’A y BB’A tenemos por la desigualdad triangular:

$$m_b+\frac{b}{2}>c;\quad m_c+\frac{c}{2}>b.$$

Sumando ambas desigualdades se obtiene el resultado.

Segunda solución.



Llamando A’, B’, C’ a los puntos medios de los lados BC, AC y AB respectivamente y dividiendo por dos la condición del enunciado podemos escribirla como:

$$\frac{C'A}{2}+\frac{C'G}{2}=\frac{B'A}{2}+\frac{B'G}{2},$$

es decir los puntos C’ y B’ están en una elipse de focos A y G.

Llamando M al punto medio de C’B’ , M esta en la mediana AA’ y no es el centro de la elipse (punto medio del segmento AG), por tanto C’B’ ha de ser perpendicular a AA’, y entonces AA’ además de mediana es altura y el triángulo es isósceles.

3.- Sean a, b, c números reales. Se consideran las funciones:

$$f(x)=ax^2+bx+c, \qquad g(x)=cx^2+bx+a.$$

Sabiendo que

$$|f(-1)|\le 1, \qquad |f(0)|\le 1, \qquad |f(1)|\le 1,$$

demostrar que si -1≤ x ≤ 1, entonces:

$$|f(x)|\le\frac{5}{4} \qquad \text{y} \qquad |g(x)|\le 2.$$

Solución:

Podemos conseguir coeficientes A, B, c tales que se tenga idénticamente:

$$f(x)=Ax(x+1)+Bx(x-1)+C(x^2-1).$$

Particularizando para x = 1, -1 ,0 y resolviendo el sistema queda:

$$f(x)=\frac{f(1)}{2}x(x+1)+\frac{f(-1)}{2}x(x-1)+f(0)(1-x^2) \quad \forall x\in R$$

De aquí se deduce:

$$|f(x)|\le\frac{1}{2}|x(x+1)|+\frac{1}{2}|x(x-1)|+|1-x^2|;$$

como $-1\le x\le 1, \quad 1+x\ge 0, \quad 1-x\ge 0 \quad \text{y} \quad 1-x^2\ge 0$, resulta

$$|f(x)|\le\frac{|x|}{2}(1+x)+\frac{|x|}{2}(1-x)+1-x^2=-x^2+|x|+1=\frac{5}{4}-\left(|x|-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{5}{4},$$

por otra parte, para x ≠ 0, $g(x)=x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)$. Entonces

$$g(x)=\frac{f(1)}{2}(1+x)+\frac{f(-1)}{2}(1-x)+f(0)\left(x^2-1\right)$$

válido para $-1\le x\le 1$. Así pues

$$|g(x)|\le\frac{1+x}{2}+\frac{1-x}{2}+1-x^2=2-x^2\le 2$$

4.- Discutir la existencia de soluciones de la ecuación

$$\sqrt{x^2-p}+2\sqrt{x^2-1}=x$$

según los valores del parámetro real p, y resolverla siempre que sea posible.

Solución:

Si p < 0, entonces $\sqrt{x^2 - p} > x$; como $2\sqrt{x^2 - 1} > 0$, no existe solución. Por tanto $p \geq 0$.

Aislando un radical y elevando al cuadrado dos veces se llega a la ecuación:

$$8(2-p)x^2(4-p)^2 \text{, de donde} \quad x = \frac{|4-p|}{\sqrt{8(2-p)}}.$$

Como $x \in R$, $p < 2$, así que

$$x = \frac{4-p}{\sqrt{8(2-p)}}.$$

Sustituyendo en la ecuación dada se obtiene

$$\sqrt{\frac{(4-3p)^2}{8(2-p)}} + 2\sqrt{\frac{p^2}{8(2-p)}} = \frac{4-p}{\sqrt{8(2-p)}}$$

como p > 0, |p| = p; y finalmente:

$$|4-3p| + 2p = 4 - p \Rightarrow |4-3p| = 4 - 3p \Rightarrow 4 - 3p \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq p \leq \frac{4}{3}$$

5.- En Port Aventura hay 16 agentes secretos. Cada uno de ellos vigila a algunos de sus colegas. Se sabe que si el agente A vigila al agente B, entonces B no vigila a A. Además, 10 agentes cualesquiera pueden ser numerados de forma que el primero vigila al segundo, éste vigila al tercero,....., el último (décimo) vigila al primero.

Demostrar que también se pueden numerar de este modo 11 agentes cualesquiera.

Solución:

Diremos que los agentes A y B son neutrales si A no vigila a B ni B vigila a A.

Sean A_1, A_2,........A_n los agentes. Sean:

a_i el número de agentes que vigilan a Ai.

b_i el número de agentes que son vigilados por Ai.

c_i el número de agentes que son neutrales con Ai.

Es claro que

$$a_i + b_i + c_i = 15, \quad a_i + c_i \leq 8, \quad b_i + c_i \leq 8 \quad \forall i = 1,2,\ldots 16$$

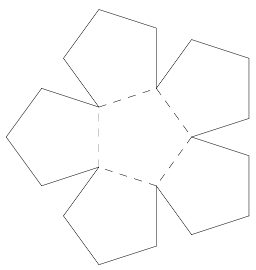
Notemos que si una cualquiera de las dos últimas desigualdades no se verificase, entonces no se podrían numerar 10 espías en la forma indicada.

Combinando las relaciones anteriores obtenemos $c_i \leq 1$. Por tanto para cualquier espía el número de sus colegas neutrales es 0 ó 1.

Razonemos por reducción al absurdo.

Supongamos que hubiera un grupo de 11 espías que NO se pudiera numerar en la forma descrita. Sea B uno cualquiera de los espías de este grupo.

Numeramos los otros 10 espías como C_1, C_2, ...C_{10} de modo que C_1 vigila C_2....., C_{10} vigila a C_1. Supongamos que ninguno de los C_i sea neutral respecto de B. Entonces si C_1 vigila a B, B no puede vigilar a C_2, pues en tal caso C_1, B, C_2, ...C_{10} formaría un grupo en las condiciones del problema, luego C_2 vigila B , etc . De este modo llegamos a la contradicción de que todos los espías del grupo vigilan a B. Por tanto cada uno de los 11 espías debe tener uno y solo uno del grupo neutral con él, lo cual es imposible.

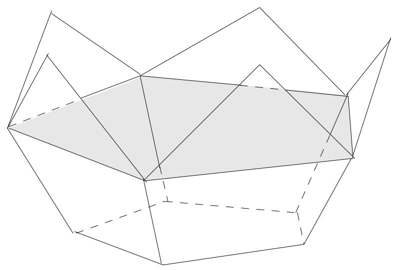


6.- La figura de la izquierda se compone de seis pentágonos regulares de lado 1m. Se dobla por las líneas de puntos hasta que coincidan las aristas no punteadas que confluyen en cada vértice.

¿Qué volumen de agua cabe en el recipiente formado?.

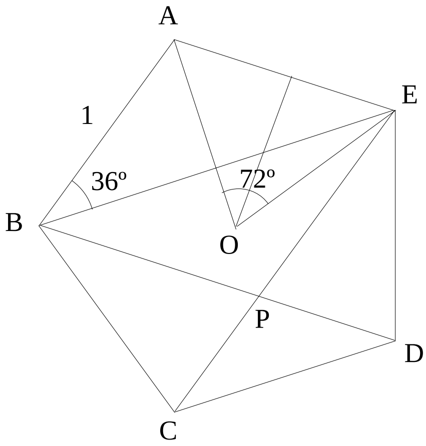
Solución:

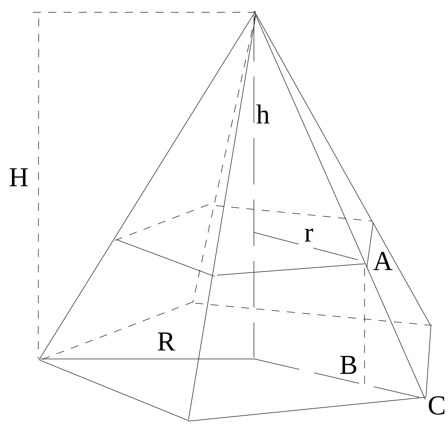
La figura formada por el agua es un tronco de pirámide pentagonal cuya base menor es el pentágono dado y cuya base mayor es otro pentágono regular que tiene por lado la diagonal del anterior paralela a la arista de la base como se muestra en la figura inferior derecha. Más abajo, se ha dibujado en forma invertida para una mejor comprensión del dibujo. (Figura central).

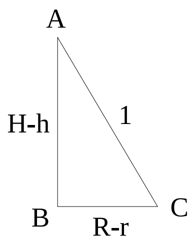


Establezcamos primero algunas relaciones conocidas para un pentágono regular de lado 1. (Figura de la izquierda).
Llamemos d a la diagonal. Por semejanza de los triángulos ABE y PCD tenemos:

$$\frac{1}{d-1}=\frac{d}{1}\Leftrightarrow d^2-d-1=0\Rightarrow d=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\varphi \qquad (1)$$







φ es el llamado número áureo y representa la relación entre la diagonal y el lado de un pentágono regular. En nuestro caso es la relación de semejanza entre las bases del tronco de pirámide.

Además : $\cos 36º=\frac{d}{2}=\frac{\varphi}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ y para el radio r : $\operatorname{sen} 36º=\frac{1}{2r}\Leftrightarrow r=\frac{1}{2\operatorname{sen}36º}=\frac{1}{\sqrt{4-\varphi^2}}\ (2)$.

Llamando V al volumen de la pirámide grande , v al de la pequeña, sabemos que $V = \varphi^3 v$; y para el volumen del tronco de cono V_t queda:

$V_t = V-v=\varphi^3 v - v = v(\varphi^3-1)=\frac{1}{3}ah(\varphi^3-1)$; siendo a el área del pentágono de lado 1. Sólo nos queda calcular a, h, sustituir y operar:

El área a la calculamos sumado 5 triángulos isósceles de lados iguales r, r formando 72º

$a=\frac{5}{2}r^2 \operatorname{sen} 72º=\frac{5}{2}r^2\, 2\operatorname{sen}36º\cos 36º=\frac{5}{2}r\cos 36º=\frac{5}{4}r\varphi$. (hemos usado 2rsen36º = 1 de (2)).

Para calcular h, por la semejanza de los triángulos de la figura central, tenemos:

$$\frac{H}{R}=\frac{h}{r}=\frac{H-h}{R-r}\Rightarrow h=\frac{r\left(H-h\right)}{R-r}=\frac{r\sqrt{1-(R-r)^2}}{r(\varphi-1)}=\frac{\sqrt{1-r^2(\varphi-1)^2}}{\varphi-1}=\frac{\sqrt{1-\frac{(\varphi-1)^2}{4-\varphi^2}}}{\varphi-1}$$

Como φ verifica la ecuación (1): $\varphi^2 = \varphi + 1$; tenemos para la expresión de h:

$$h=\frac{\sqrt{1-\frac{(\varphi-1)^2}{4-\varphi^2}}}{\varphi-1}=\frac{\sqrt{4-\varphi^2-\varphi^2+2\varphi-1}}{\left(\varphi-1\right)\sqrt{4-\varphi^2}}=\frac{\sqrt{3-2\varphi-2+2\varphi}}{\left(\varphi-1\right)\sqrt{4-\varphi^2}}=\frac{1}{\left(\varphi-1\right)\sqrt{4-\varphi^2}}$$

Sustituyendo las expresiones de a y h y poniendo $\varphi^3 -1= (\varphi-1)(\varphi^2 + \varphi + 1)$; queda:

$$V_t=\frac{1}{3}\frac{5}{4}\frac{\varphi}{\sqrt{4-\varphi^2}}\frac{(\varphi^3-1)}{(\varphi-1)\sqrt{4-\varphi^2}}=\frac{5}{12}\frac{\varphi(\varphi^2+\varphi+1)}{4-\varphi^2}=\frac{5}{6}\frac{\varphi(\varphi+1)}{3-\varphi}=\frac{5}{6}\frac{2\varphi+1}{3-\varphi}$$

y sustituyendo el valor de φ de (1), queda finalmente:

$$V_t=\frac{5}{3}\frac{2+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}=\frac{15+7\sqrt{5}}{12}\cong 2{,}554\text{m}^3$$

RESPUESTAS DE LA XXXIII OLIMPIADA ESPAÑOLA

1.- Calcular la suma de los cuadrados de los cien primeros términos de una progresión aritmética, sabiendo que la suma de ellos vale -1, y que la suma de los términos de lugar par vale +1.

2.- Un cuadrado de lado 5 se divide en 25 cuadrados unidad por rectas paralelas a los lados. Sea A el conjunto de los 16 puntos interiores, que son vértices de los cuadrados unidad, pero que no están en los lados del cuadrado inicial.
¿Cuál es el mayor número de puntos de A que es posible elegir de manera que TRES cualesquiera de ellos NO sean vértices de un triángulo rectángulo isósceles?.

3.- Se consideran las parábolas $y = x^2 + px + q$ que cortan a los ejes de coordenadas en tres puntos distintos por los que se traza una circunferencia. Demostrar que todas las circunferencias trazadas al variar p y q en **R** pasan por un punto fijo que se determinará.

Segunda Sesión

4.- Sea p un número primo. Determinar todos los enteros $k \in Z$ tales que $\sqrt{k^2 - kp}$ es natural.

5.- Demostrar que en un cuadrilátero convexo de área unidad, la suma de las longitudes de todos los lados y diagonales no es menor que $2\left(2+\sqrt{2}\right)$.

6.- Un coche tiene que dar una vuelta a un circuito circular. En el circuito hay n depósitos con cierta cantidad de gasolina. Entre todos los depósitos contienen la cantidad exacta que el coche necesita para dar una vuelta. El coche comienza con el depósito vacío. Demostrar que con independencia del número, posición y cantidad de combustible de cada depósito, siempre se puede elegir un punto de comienzo que le permita completar la vuelta.
Notas:
a) El consumo es uniforme y proporcional a la distancia recorrida.
b) El tamaño del depósito es suficiente para albergar toda la gasolina necesaria para dar una vuelta.

Soluciones

1.- Calcular la suma de los cuadrados de los cien primeros términos de una progresión aritmética, sabiendo que la suma de ellos vale -1, y que la suma de los términos de lugar par vale +1.

Sea la progresión a, a + d, a + 2d, ..., a + 99d, entonces tenemos que hallar:

$S = a^2 + (a + d)^2 + (a + 2d)^2 + ... + (a + 99d)^2 = 100a^2 + 2ad\,(1 + 2 + ... + 99) + d^2\,(1^2 + 2^2 + ... + 99^2)$.

Para calcular a y d resolvemos el sistema: $\begin{cases} (a + a + 99d)50 = -1 \\ (a + d + a + 99d)25 = 1 \end{cases}$ que operado y resuelto sale:

a = -2,98;   d = 0,06.
El resto es fácil de calcular. Los paréntesis son progresiones de primer y segundo orden.

$$1 + 2 + ... + 99 = 4950; \quad 1^2 + 2^2 + ... + 99^2 = 328350.$$

El resultado final es S = 299,98

2.- Un cuadrado de lado 5 se divide en 25 cuadrados unidad por rectas paralelas a los lados. Sea A el conjunto de los 16 puntos interiores, que son vértices de los cuadrados unidad, pero que no están en los lados del cuadrado inicial.
¿Cuál es el mayor número de puntos de A que es posible elegir de manera que TRES cualesquiera de ellos NO sean vértices de un triángulo rectángulo isósceles?.

Numeremos los puntos como indica la figura

13	14	15	16
9	10	11	12
5	6	7	8
1	2	3	4

Por simple tanteo se obtiene un conjunto de seis puntos verificando la condición del enunciado, por ejemplo {1, 2, 3, 8, 12, 16}.
Supongamos que hubiera un conjunto M de 7 puntos verificando la condición del enunciado.
Notemos que si cuatro puntos forman un cuadrado, a lo sumo figurarán dos de ellos en M. Los puntos de los conjuntos

{1, 4, 16, 13}, {2, 8, 15, 9}, {3, 12, 14, 5}

forman cuadrados y su unión forma el "contorno exterior" de A, luego a los sumo 6 de los puntos elegidos deben estar en M y por tanto al menos un punto de M debe ser del conjunto "interior" de A: {6, 7, 10, 11}. Por la simetría de la figura supongamos que es el 7.
Como {7, 16, 9} y {1, 7, 14} forman triángulos rectángulo isósceles, a lo sumo 2 de los puntos del conjunto {1, 9, 14, 16} deberán figurar en M. Además {5, 7, 13, 15} forman un cuadrado por tanto a lo sumo podremos elegir dos números entre {5, 13, 15} , de ello se deduce en M deben figurar al menos tres puntos de {2, 3, 4, 6, 8, 10, 11, 12} . Si descomponemos este conjunto en dos subconjuntos "cuadrados" y disjuntos
:

{3, 6, 11, 8} y {2, 4, 10, 12}

forzosamente de uno de ellos habremos de tomar dos puntos y uno de otro.

Si tomamos dos puntos del primero las únicas posibilidades son {3, 11} y {6, 8} ambas incompatibles con cualquier elección del punto restante en el segundo conjunto.
Si los dos puntos se eligen del segundo las ínicas maneras son {2, 12} y {4, 10}, de nuevo incompatibles con cualquier elección del punto que falta en el primer conjunto.
En resumen el número máximo de elementos es 6.

3.- Se consideran las parábolas $y = x^2 + px + q$ que cortan a los ejes de coordenadas en tres puntos distintos por los que se traza una circunferencia. Demostrar que todas las circunferencias trazadas al variar p y q en **R** pasan por un punto fijo que se determinará.

1ª Solución (analítica)
Sean α y β las raíces . Los tres puntos que definen la circunferencia son $A(\alpha, 0)$; $B(\beta, 0)$; $C(0, q)$.
Verificando $\alpha + \beta = -p$. y $\alpha\beta = q$. (1)
La mediatriz de AB es la recta paralela al eje OY de ecuación $x = -\frac{p}{2}$.
Hallando la mediatriz de AC, cortando con la anterior y teniendo en cuenta (1) se obtiene para el centro las coordenadas $\left(-\frac{p}{2}, \frac{q+1}{2}\right)$ y para el radio $r = \sqrt{\frac{p^2 + (1-q)^2}{4}}$. La ecuación de la circunferencia es: $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{q+1}{2}\right)^2 = \frac{p^2 + (1-q)^2}{4}$, que una vez operada queda:

$$x^2 + y^2 + px - (1+q)y + q = 0$$

que se verifica para el punto (0, 1) con independencia de p y q como se comprueba por simple sustitución.
Claramente el punto fijo se puede obtener a partir de tres circunferencias concretas.

2ª Solución (geométrica). Puesto que la parábola corta al eje de abscisas en dos puntos, se podrá escribir en la forma:

$$y = (x - a)(x - b)$$

y los puntos de intersección son

$$A(a, 0); \quad B(b, 0); \quad C(0, ab)$$

La inversión de polo el origen que transforma A en B, transforma C en U(0, 1) , así que los cuatro puntos A,B,C,U son concíclicos y todas las circunferencias pasan por el punto fijo U.

4.- Sea p un número primo. Determinar todos los enteros $k \in Z$ tales que $\sqrt{k^2 - kp}$ es natural.

Solución: Pongamos $\sqrt{k^2 - kp} = n \Leftrightarrow k^2 - pk - n^2 = 0 \Rightarrow k = \frac{p \pm \sqrt{p^2 + 4n^2}}{2} \quad (1)$.
El radicando ha de ser cuadrado perfecto, llamésmole a. Se tiene:

$$p^2 + 4n^2 = a^2 \Leftrightarrow p^2 = (a+2n)(a-2n).$$

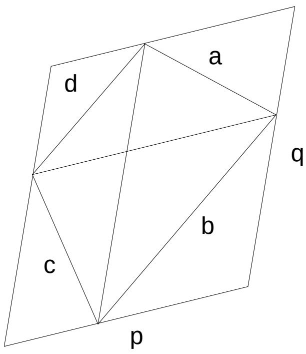
Como p es primo y $a + 2n \geq a - 2n$, sólo hay dos posibilidades:
1) $a + 2n = p^2$ y $a - 2n = 1$
2) $a + 2n = p$ y $a - 2n = p$

En el caso 1) $a = \dfrac{p^2 + 1}{2}$; $n = \dfrac{p^2 - 1}{4}$, lo que exige $p \neq 2$ (n natural).
En el caso 2) resulta a = p ; n = 0.
Sustituyendo los valores de a en (1) y operando queda:
Si p = 2 , entonces k = 2 o k = 0
Su $p \neq 2$ entonces quedan los cuatro valores:

$$k_1 = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2, \quad k_2 = -\left(\frac{p-1}{2}\right)^2, \quad k_3 = p, \quad k_4 = 0$$

5.- Demostrar que en un cuadrilátero convexo de área unidad, la suma de las longitudes de todos los lados y diagonales no es menor que $2\left(2+\sqrt{2}\right)$.

Solución. 1ª



Sea el cuadrilátero de lados a, b, c, d y diagonales p y q.
Trazando la paralelas por cada vértice a la diagonal que no pasa por él se forma un paralelogramo de área 2 y lado p y q.
Por el teorema isoperimétrico, de todos los paralelogramos de área 2, el cuadrado tiene perímetro mínimo que vale $4\sqrt{2}$, luego

$$2(p+q) \geq 4\sqrt{2} \Leftrightarrow p+q \geq 2\sqrt{2} \quad (1)$$

En cuanto al los lados por el mismo teorema para una cuadrado de área 1 el perímetro es 4 luego:

$$a + b + c + d \geq 4 \quad (2)$$

Sumando(1) y (2) se obtiene el resultado.

Solución 2ª (Sin usar la propiedad isoperimétrica).
Consiste en establecer directamente las desigualdades (1) y (2).
Si α es el ángulo que forman las diagonales, tenemos:

$$1 = \frac{pq}{2}\operatorname{sen}\alpha \leq \frac{pq}{2} \Leftrightarrow pq \geq 2$$

pero $(p + q)^2 = (p - q)^2 + 4pq \geq 4pq \geq 8$. de donde $p+q \geq \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ (1).
Para los lados, si descomponemos el cuadrilátero en dos triángulos mediante la diagonal q, tenemos:

$$1 \leq \frac{ab}{2} + \frac{cd}{2}$$

Descomponiendo ahora en dos triángulos mediante la diagonal p resulta:

$$1 \leq \frac{bc}{2} + \frac{da}{2}$$

y de ambas desigualdades se obtiene: $ab + bc + cd + da \geq 4$.
Pero:$(a + b + c + d)^2 = ((a + c) - (b + d))^2 + 4 (a + c)(b + d) \geq 4 (a + c)(b + d) \geq 16$, de donde

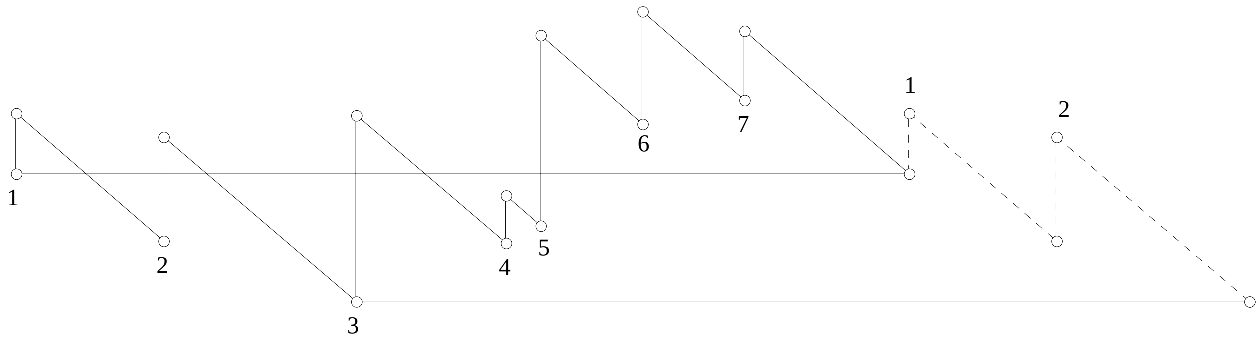
$$a + b + c + d \geq 4 \quad (2)$$

Basta sumar (1) y (2) para obtener lo pedido.

6.- Un coche tiene que dar una vuelta a un circuito circular. En el circuito hay n depósitos con cierta cantidad de gasolina. Entre todos los depósitos contienen la cantidad exacta que el coche necesita para dar una vuelta. El coche comienza con el depósito vacío. Demostrar que con independencia del número, posición y cantidad de combustible de cada depósito, siempre se puede elegir un punto de comienzo que le permita completar la vuelta.
Notas:
a) El consumo es uniforme y proporcional a la distancia recorrida.
b) El tamaño del depósito es suficiente para albergar toda la gasolina necesaria para dar una vuelta.

Solución 1 (Sergi Elizalde . Concursante)

Sean c_1, c_2, ...,c_n las cantidades de combustible en cada uno de los n depósitos y sean d_1, d_2,....,d_n las distancias a recorrer desde cada depósito hasta el siguiente.
Hagamos el gráfico del consumo comenzando en un punto de aprovisionamiento cualquiera.
Notemos que los tramos inclinado tienen todos la misma pendiente. Los tramos bajo el eje



representan las situaciones imposibles. La pendiente de los tramos inclinados vale : $-\frac{\sum c_i}{\sum d_i}$. La hipótesis de que el total de combustible es la cantidad exacta para dar la vuelta se traduce en que la gráfica comienza y termina en el eje OX.
La función resultante (trazo continuo) tiene un mínimo, en la figura el punto 3. Basta comenzar en ese punto para asegurar que el recorrido es posible.
En efecto, gráficamente equivale a trasladar el eje OX en sentido vertical hasta el punto más bajo con lo que aseguramos que ninguna zona queda bajo el eje.
La nueva gráfica puede trazarse a partir del punto 3 siguiendo el mismo trazado hacia la derecha y trasladando la parte anterior (tramos 1-2 y 2-3) al punto final de la gráfica anterior (de puntos en la figura).

Solución 2 (Mª A. López Chamorro. Miembro del Jurado).

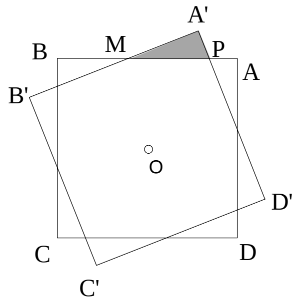
Se numeran los depósitos de 1 a n comenzando por uno cualquiera en sentido antihorario.
Llamamos:
a_1, a_2, ...,a_n a la cantidad de gasolina de cada depósito.
b_1, b_2, ...,b_n a la cantidad de gasolina necesaria para ir del depósito a_i al siguiente.
$d_1 = a_1 - b_1$, $d_2 = a_2 - b_2$,....., $d_n = a_n - b_n$
Diremos que un depósito es positivo o negativo según lo sea d_i .
Si $d_i = 0$, la ubicación del depósito i no influye en la ordenación del recorrido. Por ello podemos suponer sin pérdida de generalidad que $d_i \neq 0$ para todo i.
Por otra parte, si hay varios depósitos consecutivos positivos o negativos, el tramo limitado por ellos se puede considerar como un único tramo positivo o negativo. Así, el problema se reduce a tener un número par de depósitos alternativamente positivos o negativos. Agrupando los tramos por parejas, éstas resultarán positivas o negativas y volvemos a repetir el proceso.

Así reducimos el caso a un número de depósitos $n_1 < n/2$.
Como $n < 2^k$, a lo sumo en k - 1 etapas llegaremos a tener 2 depósitos, uno con más gasolina que otro, en cuyo caso empezando por el que tenga más combustible se puede completar el circuito.
El caso de un sólo depósito es trivial. Se empieza y termina en ese único depósito.

RESPUESTAS DE LA XXXIV OLIMPIADA ESPAÑOLA

1.- Un cuadrado ABCD de centro O y lado 1, gira un ángulo α en torno a O. Hallar el área común a ambos cuadrados.

Solución 1.



Por la simetría bastará considerar $0 < \alpha < 90^{\circ}$, ya que la función es periódica con periodo de un cuarto de vuelta.
El área pedida $S(\alpha)$ sale restando del área del cuadrado cuatro triángulos como el PA'M.
Llamando x al cateto PA' e y al cateto A'M, el área de cuatro triángulos vale 2xy. Como el lado B'A' vale 1, tenemos:

$$x + y = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1)$$

relación que elevada al cuadrado y simplificada queda:

$$2xy = 1 - 2\sqrt{x^2 + y^2} \quad (2)$$

pero $x = \sqrt{x^2 + y^2}\cos\alpha, \quad y = \sqrt{x^2 + y^2}\operatorname{sen}\alpha$, y sustituyendo en (1) resulta:

$$\sqrt{x^2 + y^2}(1 + \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{1 + \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha}$$

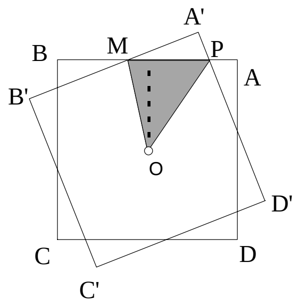
sustituyendo en (2) y operando obtenemos:

$$2xy = 1 - \frac{2}{1 + \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha - 1}{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha + 1}.$$

Finalmente para el área pedida obtenemos:

$$S(\alpha) = 1 - \frac{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha - 1}{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha + 1} = \frac{2}{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha + 1} \text{ con } 0 \le \alpha \le 90^{\circ}$$

Solución 2.



El área pedida consta de 8 triángulos como el sombreado en la figura OPM.
Tomando como base b = MP, la altura es constante (de trazos en la figura) y vale ½.
En el triángulo PA'M se tiene:
MA' = b cos α, PA' = b sen α ; pero BM = MA' y PA = PA', además:

$$BM + MP + PA = 1 \Leftrightarrow b\cos\alpha + b + b\operatorname{sen}\alpha = 1,$$

de donde

$$b = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha + 1}$$

y el área pedida es:

$$S(\alpha) = 8\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha + 1} = \frac{2}{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha + 1} \quad \text{con } 0 \le \alpha \le 90º$$

2.- Hallar todos los números naturales de 4 cifras, escritos en base 10, que sean iguales al cubo de la suma de sus cifras.

Solución:
Sea n un número verificando el enunciado, y s la suma de sus cifras.
Como $1000 \le n \le 9999$ y $n = s^3$, resulta

$$11 \le s \le 21 \qquad (1)$$

Si n = xyzt, tenemos:

$$1000x + 100y + 10z + t = s^3 \qquad (2)$$
$$x + y + z + t = s$$

restando queda:

$$999x + 99y + 9z = s^3 - s \qquad (3)$$

cuyo segundo miembro ha de ser múltiplo de 9 (por serlo el primero) y, habida cuenta de que

$$s^3 - s = (s - 1)\, s\, (s + 1)$$

y por (1), sólo hay tres valores de $s^3 - s$ que son múltiplos de 9:

$$16·17·18; \quad 17·18·19 \text{ y } 18·19·20$$

sustituimos en (3) y analizamos cada caso.

1º

$$999x + 99y + 9z = 16·17·18 \Leftrightarrow 111x + 11y + z = 544$$

resulta inmediatamente x = 4; y = 9; z = 1, valores que llevados a (2) con s = 17 se obtiene t = 3 y finalmente n = 4913

2º

$$999x + 99y + 9z = 17·18·19 \Leftrightarrow 111x + 11y + z = 646$$

de donde x = 5; y = 8; z = 3, valores que llevados a (2) con s = 18 se obtiene t = 2 y finalmente n = 5832

3º

$$999x + 99y + 9z = 18·19·20 \Leftrightarrow 111x + 11y + z = 760$$

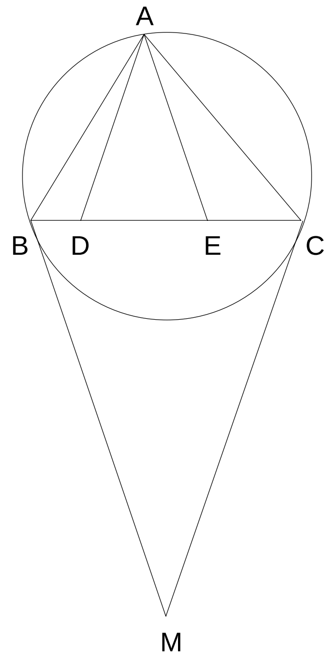
resulta x = 6; y = 8; z = 6, valores que llevados a (2) con s = 19 resulta una contradicción.

Resumiendo, las únicas soluciones son **4913** y **5832**

3.- Se considera el triángulo ABC y su circunferencia circunscrita. Si D y E son puntos sobre el lado BC tales que AD y AE son, respectivamente, paralelas a las tangentes en C y en B a la circunferencia circunscrita, demostrar que:

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}$$

Solución:



Los triángulos ΔABC y ΔADC son semejantes pues tienen los tres ángulos iguales ya que:
∠ADC = ∠BCM = ∠BAC (la primera igualdad por ser AC y CM paralelas y la segunda por ser ∠BCM ángulo semiinscrito) y el ángulo ∠ACD es común.
Estableciendo la proporcionalidad entre sus lados, resulta:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{CD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC}^2 \quad (1)$$

De modo análogo los triángulos ΔABC y ΔABE son semejantes pues:
∠AEB = ∠EBM = ∠BAC y el ángulo ∠ABE es común.
Estableciendo la proporcionalidad entre sus lados, resulta:

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{BE} \cdot \overline{BC} = \overline{AB}^2 \quad (2)$$

Dividiendo las igualdades (1) y (2) se obtiene el resultado.

4.- Hallar las tangentes de los ángulos de un triángulo sabiendo que son números enteros positivos.

Solución.

Sean α, β, γ los tres ángulos y supongamos $\alpha \le \beta \le \gamma$. Si fuera $\gamma \ge \frac{\pi}{2}$, tendría que ser $\alpha < \frac{\pi}{4}$ y entonces tg α no es entero.

Si tg α > 1, entonces $\alpha \ge$ arc tg 2 > arc tg $\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, imposible porque $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Por tanto tg α = 1 y $\beta + \gamma = \frac{3\pi}{4}$, con lo que:

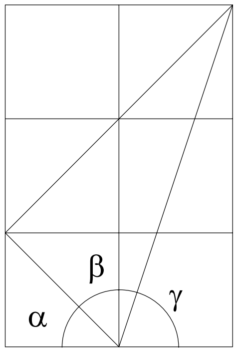
$$\operatorname{tg}(\beta + \gamma) = -1 = \frac{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma}{1 - \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma}$$

relación que operada se convierte en:

$$(\operatorname{tg}\beta - 1)(\operatorname{tg}\gamma - 1) = 2$$

de donde, por ser enteros positivos, se sigue tg β = 2 y tg γ = 3.

Existe una visualización “sin palabras” de la solución: arc tg 1 + arc tg 2 + arc tg 3 = π.



5.- Hallar todas las funciones $\mathbf{f:N \to N}$ estrictamente crecientes y tales que:

$$f(n + f(n)) = 2 f(n)$$

para n = 1, 2, 3, ...

Solución:
Supongamos f(1) = b. Entonces, f(1 + b) = 2b, como f es estrictamente creciente, se tiene:

$$b = f(1) < f(1 +1) < \ldots < f(1+b) = 2b = b + b.$$

y resulta que f(1), f(2),….f(1+ b) son b + 1 naturales, distintos, el primero vale b y el último 2b, por tanto han de ser consecutivos.
resulta entonces:

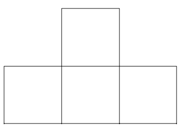
$$f(1) = b, f(2) = 1 + b, f(3) = 2 + b, \ldots, f(1 + b) = b + b.$$

En general, para n > 1, si f(n) = c , f(n + c) = 2c = c + c y resulta que:

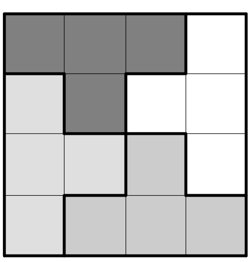
c = f(n) < f(n + 1) <.…< f(n + c) = c + c y los números f(n), f(n + 1), ….., f(n + c) son consecutivos.
Así pues,

$$f(n) = n - 1 + f(1)$$

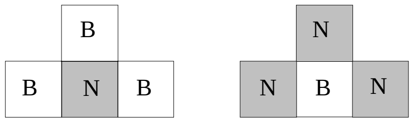
6.- Determina los valores de n para los que es posible construir un cuadrado de n × n ensamblando piezas del tipo:



Solución:
Evidentemente n^2 debe ser múltiplo de 4 y, por tanto n necesariamente es par.
Si n = 4k podemos dividir cualquier cuadrado n × n en k^2 sub-cuadrados del tipo 4 × 4 cada uno de los cuales lo podemos rellenar en la forma señalada en la figura de la izquierda.



Queda sólo considerar el caso n = 4k + 2. Veamos que en ese caso la repuesta es negativa.
Supongamos que fuera posible.
Si pintamos cada cuadradito alternativamente de blanco y negro como en un tablero de ajedrez, hay dos posibilidades para cada pieza:



Sea a el número de piezas del tipo de las de la izquierda y b el número de piezas del tipo de las de la derecha.
Tenemos:

$$a + b = \frac{(4k+2)^2}{4} = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

luego a + b ha de ser impar.
Por otra parte, como hay tantas casillas blancas como negras, se tiene:
$3a + b = 3b + a \Leftrightarrow a = b$, de donde $a + b = 2a$ ha de ser par en contradicción con lo anterior.

5.- Demuestra que en el caso de que las ecuaciones:

$$x^3 + mx - n = 0 , \qquad nx^3 - 2\,m^2 x^2 - 5mnx - 2m^3 - n^2 = 0 \quad (n \neq 0)$$

tengan una raíz común, la primera tendrá dos raíces iguales y determina entonces las raíces de las dos ecuaciones en función de n.

Solución:

Sea α la raíz común de ambas ecuaciones. Entonces

$$\alpha^3 + m\alpha = n \qquad (1)$$

y sustituyendo en la segunda ecuación se obtiene, tras hacer operaciones:

$$6m\,\alpha^4 + 8m^2\,\alpha^2 + 2m^3 = 0$$

Supongamos $m \neq 0$, entonces simplificando la relación anterior queda:

$$3\,\alpha^4 + 4m\,\alpha^2 + m^2 = 0 \qquad (2)$$

Resolviendo (2) respecto de m obtenemos $m = \begin{cases} -\alpha^2 & \text{(i)} \\ -3\alpha^2 & \text{(ii)} \end{cases}$ Analicemos cada caso.

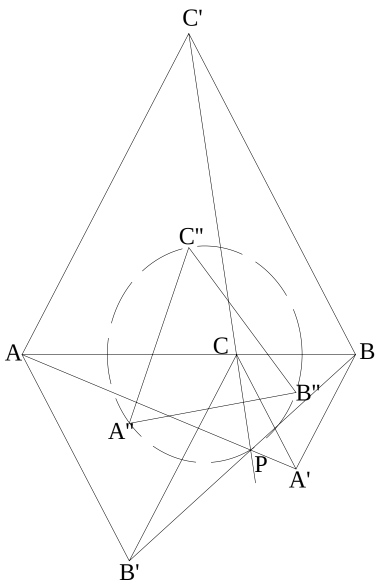
(i) Si $m = -\alpha^2$, sustituyendo en la primera ecuación y despejando n queda: $n = \alpha^3 - \alpha^3 = 0$ en contra de lo supuesto. Por tanto (i) queda descartado.
(ii) Si $m = -3\alpha^3$, sustituyendo en la primera ecuación y despejando n queda:
$n = \alpha^3 - 3\,\alpha^3 = -2\,\alpha^3$ y la primera ecuación queda:

$$x^3 - 3\alpha^2 x + 2\alpha^3 = (x-\alpha)(x^2 + \alpha x - 2\alpha^2) = (x-\alpha)^2(x+2\alpha)$$

que, efectivamente, tiene la raíz α doble.
de $n = -2\,\alpha^3$ obtenemos $\alpha = \sqrt[3]{-\frac{n}{2}}$.
Entonces la segunda ecuación es de la forma

$$-2\alpha^3\left(x^3 + 9\alpha x^2 + 15\alpha^2 x + 25\alpha^3\right) = 0 \ ,$$

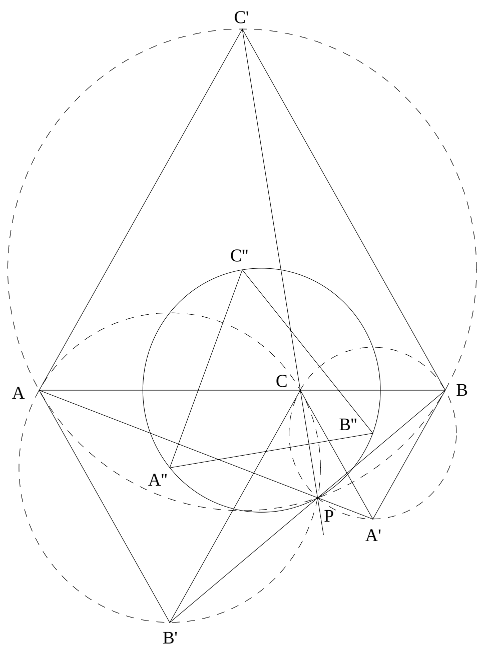
y, dividiendo por $(x - \alpha)$ resulta $-2\alpha^3(x-\alpha)(x+5\alpha)^2 = 0$,
cuyas raíces son α y $-5\,\alpha$ siendo doble la última.
Si m = 0, las dos ecuaciones son iguales y sus tres raíces son las mismas pero la primera no tiene dos raíces iguales por lo que en el enunciado debería haberse añadido $m \neq 0$.



6.- En la figura, AB es un segmento fijo y C un punto variable dentro de él. Se construyen triángulos equiláteros de lados AC y CB, ACB’ y CBA’ en el mismo semiplano definido por AB, y otro de lado AB, ABC’ en el semiplano opuesto. Demuestra:
a) Las rectas AA’, BB’ y CC’ son concurrentes.
b) Si llamamos P al punto común a las tres rectas del apartado a), hallar el lugar geométrico de P cuando C varía en el segmento AB.
c) Los centros A’’, B’’ y C’’ de los tres triángulos forman un triángulo equilátero.
d) Los puntos A’’, B’’, C’’ y P están sobre una circunferencia.

Solución:

a) Se traza la circunferencia circunscrita al triángulo ABC’ y se llama P a la intersección de CC’ con ella. Evidentemente (arco capaz) ∠APB=120º y PC’ es su bisectriz con lo que ∠APC=∠CPB=60º y P ha de estar en las circunferencias circunscritas a los triángulos ACB’ y BCA’. Por tanto las tres circunferencias se cortan en P.
Como ∠CPB’=120º y ∠CPB=60º sumando queda: ∠BPB’=180º y P está alineado con BB’.
De modo análogo se ve que P está alineado con AA’.



b) Como P está definido por la intersección de la recta CC’ con la circunferencia circunscrita al triángulo ABC’ el lugar pedido es el arco APB de esa circunferencia.

c) Los lados del triángulo son perpendiculares a las cuerdas PA , PB y PC que forman ángulos de 60º o 120º. por ello, entre sí forman ángulos iguales de 60º.

d) Basta comprobar que los centros C’’, B’’, A’’ y P verifican el teorema de Tolomeo:

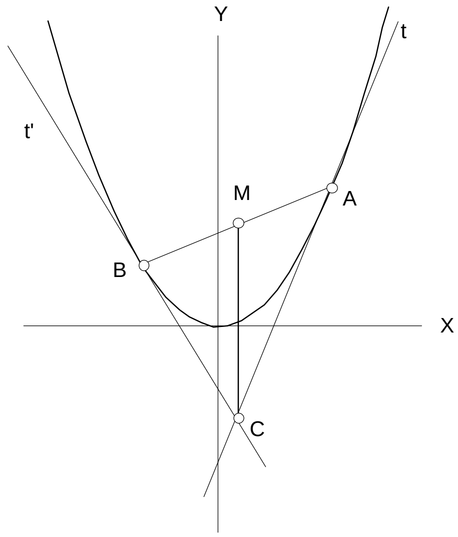
$$\overline{PC''}\;\overline{A''B''} = \overline{PA''}\;\overline{B''C''} + \overline{PB''}\;\overline{A''C''} \Leftrightarrow \overline{PC''} = \overline{PA''} + \overline{PB''} \Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$$

siendo la última igualdad evidente por construcción.

RESPUESTAS DE LA XXXV OLIMPIADA ESPAÑOLA

Problema 1.

Las rectas t y t', tangentes a la parábola de ecuación $y = x^2$ en los puntos A y B, se cortan en el punto C.
La mediana del triángulo ΔABC correspondiente al vértice C tiene longitud m.
Determinar el área del triángulo ΔABC en función de m.



Solución:
Sean $A(a, a^2)$; $B(b, b^2)$. Las ecuaciones de t y t' son:

$$t: y = 2ax - a^2, \quad t': y = 2bx - b^2$$

y su intersección C es: $C\left(\frac{a+b}{2}, ab\right)$.

La mediana CM está en la recta: $x = \frac{a+b}{2}$, paralela al eje OY. Las coordenadas de M son: $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a^2+b^2}{2}\right)$.

Tenemos: $m = CM = \frac{(a-b)^2}{2}$ y si h es la altura del triángulo ΔBMC resulta: $h = \frac{b-a}{2} = \sqrt{\frac{m}{2}}$

Poniendo $[XYZ]$ para denotar el área del triángulo de vértices X,Y,Z queda finalmente:

$$[ABC] = 2[BMC] = 2\frac{1}{2}m\sqrt{\frac{m}{2}} = \sqrt{\frac{m^3}{2}}$$

Problema 2.

Probar que existe una sucesión de enteros positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ tal que

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots\ldots + a_n^2$$

es un cuadrado perfecto para todo entero positivo n.

Solución:
Lo haremos por inducción sobre n, para n = 2 basta tomar $a_1 = 3$; $a_2 = 4$ con $3^2 + 4^2 = 5^2$.
Supongamos que $a_1^2 + a_2^2 + \ldots\ldots + a_n^2 = k^2$. Veamos que podemos encontrar un entero positivo a_{n+1} tal que $k^2 + a_{n+1}^2 = p^2$.

En efecto, $k^2 = p^2 - a_{n+1}^2 = (p + a_{n+1})(p - a_{n-1})$.

Pongamos $a = p + a_{n+1}; b = p - a_{n+1}$.

Tenemos: $p = \frac{a+b}{2}; \quad a_{n+1} = \frac{a-b}{2}; \quad k^2 = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a-b}{2}$.

La última expresión exige que *a* y *b* son de la misma paridad. Distinguiremos dos casos
1.- *a* y *b* son pares, entonces $k^2 = 4m$. Tomado $a = 2m$; $b = 2$ queda:

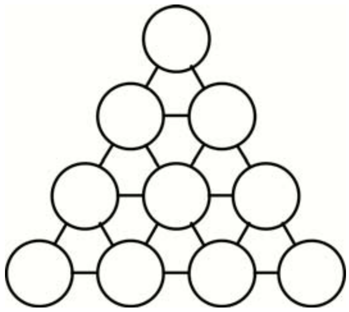
$$p = m + 1 = \frac{k^2}{4} + 1; \quad a_{n+1} = m - 1 = \frac{k^2}{4} - 1$$

2.- a y b son impares, entonces $k^2 = 2m + 1$. Tomando $a = 2m + 1$, $b = 1$ queda:

$$p = m + 1 = \frac{k^2 - 1}{2} + 1; \quad a_{n+1} = m = \frac{k^2 - 1}{2}$$

En ambos casos hemos encontrado a_{n+1} entero verificando el enunciado.

Segunda Sesión
Problema 3.



Sobre un tablero en forma de triángulo equilátero como se indica en la figura; se juega un solitario.
Sobre cada casilla se coloca una ficha. Cada ficha es blanca por un lado, y negra por el otro. Inicialmente, sólo una ficha, que está situada en un vértice, tiene la cara negra hacia arriba; el resto de las fichas tiene la cara blanca hacia arriba. En cada movimiento se retira sólo una ficha negra del tablero y se da la vuelta a cada una de las fichas que ocupan una casilla vecina. Casillas vecinas son las que están unidas por un segmento.
Después de varios movimientos ¿será posible quitar todas las fichas del tablero?

Solución:
En el tablero, hay casillas de tres tipos : vértice, lado, o interiores. Cada una de ellas tiene, respectivamente, dos, cuatro o seis casillas vecinas.
Si pudiéramos retirar todas las fichas del tablero, habría un momento en que quedaría sobre él una única ficha negra. Esa ficha era inicialmente blanca, luego ha tenido que cambiar de color un número impar de veces. Pero esto es imposible, porque una ficha se vuelve cada vez que se retira una ficha vecina, y ninguna ficha tiene un número impar de casillas vecinas.

Problema 4.

Una caja contiene 900 tarjetas, numeradas del 100 al 999. Se sacan al azar (sin reposición) tarjetas de la caja y se anota la suma de los dígitos de cada tarjeta extraída. ¿Cuál es la menor cantidad de tarjetas que se deben sacar, para garantizar que al menos tres de esas sumas sean iguales?

Solución:
Hay 27 posibles resultados para la suma de dígitos (de 1 a 27). Las sumas 1 y 27 sólo se puede obtener de un modo (100 y 999) En el caso más desfavorable al sacar 52 (27 + 25) tarjetas todas repetirán suma dos veces y en la siguiente (extracción 53) una de ellas aparecerá por tercera vez. Por tanto el número pedido es 27 + 25 + 1 = 53.

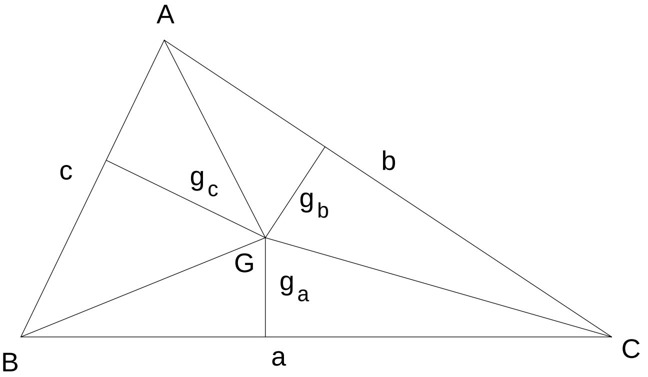
Problema 5.

El baricentro del triángulo ΔABC es G. Denotamos por g_a, g_b, g_c las distancias desde G a los lados a, b y c respectivamente.
Sea r el radio de la circunferencia inscrita. Probar que:

i) $g_a \geq \frac{2r}{3}$, $g_b \geq \frac{2r}{3}$, $g_c \geq \frac{2r}{3}$

ii) $\dfrac{g_a + g_b + g_c}{r} \geq 3$

Solución 1 (del autor del problema):



i) Es sabido que uniendo G con cada vértice, se forman tres triángulos BGC de base a y altura g_a , AGC de base b y altura g_b y AGB de base c y altura g_c de la misma área.
Por tanto, llamando S al área de ABC:

$$a\cdot g_a = b\cdot g_b = c\cdot g_c = \frac{2S}{3} \quad (1)$$

Por otra parte sabemos que $r\cdot(a + b + c) = 2S$ (basta unir el incentro con los tres vértices y quedan tres triángulos de bases a, b, c y altura común r).
Sustituyendo 2S en (1), y despejando queda:

$$g_a = \frac{r}{3}\frac{a+b+c}{a}; \quad g_b = \frac{r}{3}\frac{a+b+c}{b}; \quad g_c = \frac{r}{3}\frac{a+b+c}{c} \quad (2)$$

y por la desigualdad triangular ($b + c \geq a$) , resulta : $\dfrac{a+b+c}{a} = 1 + \dfrac{b+c}{a} \geq 2$, de donde $g_a \geq \dfrac{2r}{3}$ y de modo análogo para g_b y g_c .

b) De (2) , haciendo los inversos y sumando resulta:

$$\frac{1}{g_a} + \frac{1}{g_b} + \frac{1}{g_c} = \frac{3a}{r(a+b+c)} + \frac{3b}{r(a+b+c)} + \frac{3c}{r(a+b+c)} = \frac{3}{r}$$

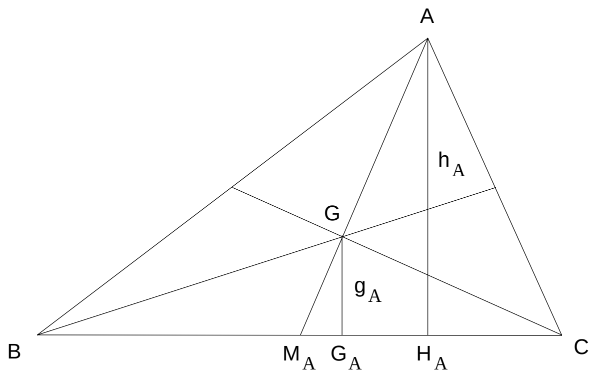
finalmente, aplicando la desigualdad entre las medias aritmética y armónica:

$$\frac{g_a + g_b + g_c}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{g_a} + \frac{1}{g_b} + \frac{1}{g_c}} = \frac{3}{\frac{3}{r}} = r \Leftrightarrow \frac{g_a + g_b + g_c}{r} \geq 3$$

Nota.- Sumando las tres desigualdades de a) sólo obtenemos $\dfrac{g_a + g_b + g_c}{r} \geq 2$

Solución 2 (de Ramón José que mereció mención especial)

i) Consideremos los puntos M_A, H_A, G_A como indica la figura.
Pondremos h_A a la altura correspondiente a A, p el semiperímetro y S el área de ABC.



Los triángulos AM_AH_A y GM_AG_A son semejantes siendo la razón de semejanza 3 (propiedad del baricentro sobre cada mediana).
Entonces

$$h_A = 3\ g_A \quad (1)$$

Por la desigualdad triangular:

$$b+c \geq a \Leftrightarrow 2p \geq 2a \Leftrightarrow p \geq a \Leftrightarrow \frac{a}{p} \leq 1$$

multiplicando por h_A y teniendo en cuenta (1) queda:

$$g_A \geq \frac{ah_A}{3p} \Leftrightarrow g_A \geq \frac{2S}{3p}$$

finalmente, como $S = pr$ resulta $g_A \geq \frac{2}{3}r$.

Análogamente obtendríamos las correspondientes desigualdades para g_B y g_C .

ii) Usaremos la desigualdad $x+\frac{1}{x} \geq 2$ que se deduce de la obvia $(x-1)^2 \geq 0$. (Consideraremos siempre x positivo).

Tenemos entonces:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right) \geq 6$$

Sumando 3, ordenando y operando resulta:

$$1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1 \geq 9 \Leftrightarrow a\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$$

sacando factor común, dividiendo por 3 y poniendo $2p = a + b + c$, queda:

$$\frac{2p}{3a}+\frac{2p}{3b}+\frac{2p}{3c} \geq 3 \quad (2)$$

Por otra parte, como $3g_a = h_A; \quad 3g_b = h_B; \quad 3g_c = h_C$, resulta $2S = 3g_a a = 3g_b b = 3g_c c$

Despejando *3a, 3b y 3c* y sustituyendo en (2), queda:

$$(g_a + g_b + g_c)\frac{p}{S} \geq 3$$

Finalmente usando de nuevo $S = pr$, resulta $\frac{g_a + g_b + g_c}{r} \geq 3$

Problema 6.

Se divide el plano en un número finito de regiones N mediante tres familias de rectas paralelas. No hay tres rectas que pasen por un mismo punto.

¿Cuál es el mínimo número de rectas necesarias para que N>1999?

Solución:

Supongamos que hay x rectas en la primera familia, y en la segunda y z en la tercera. Las x rectas de la primera familia determinan $x + 1$ regiones. La primera recta de la segunda familia determina en el plano $(x+1)\cdot 2$ regiones, la segunda $(x+1)\cdot 3$..... la y -ésima determina $(x + 1)(y + 1)$ regiones.

La primera recta de la tercera familia es cortada por las $x + y$ rectas existentes en $x + y + 1$ partes y cada una de estas partes divide a en dos a cada región existente de modo que el número de regiones se incrementa en $x + y + 1$ regiones. Cada recta de la tercera familia aumenta las regiones existentes en la misma cantidad; luego el número total de regiones N vale:

$$N = (x+1)(y+1)+z(x+y+1) = x+y+z+xy+xz+yz+1 = n+m+1$$

con $n = x + y + z$ y $m = xy + xz + yz$.

Tenemos:

$$m = x^2 + y^2 + z^2 - \frac{1}{2}\left((y - z)^2 + (z - x)^2 + (x - y)^2\right) \leq x^2 + y^2 + z^2$$, entonces

$$n^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2m \geq 3m \Leftrightarrow m \leq \frac{n^2}{3} \text{ y } N = n + m + 1 \leq n + \frac{n^2}{3} + 1.$$

Para n = 76, $n^2 + \frac{n^2}{3} + 1 > 2002$. Así, si $n = 76 = x + y + z$ con x = 26, y = 25, z = 25, resulta:
m = 1925 y N = 2002.

RESPUESTAS DE LA XXXVI OLIMPIADA ESPAÑOLA

Problema 1.
Sean los polinomios:

$$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1;$$

$$Q(x) = x^4 + cx^3 + bx^2 + ax + 1.$$

Halla las condiciones que deben cumplir los parámetros reales a, b y c ($a \neq c$) para que P(x) y Q(x) tengan dos raíces comunes y resuelve en ese caso las ecuaciones $P(x) = 0$; $Q(x) = 0$.

Solución de Virginia García Madurga de Zaragoza.

Las raíces comunes a ambos polinomios serán raíces de la diferencia:

$$P(x) - Q(x) = (a - c)\, x^3 + (c - a)\, x$$

Resolvemos la ecuación $P(x) - Q(x) = 0$, sacando primero x factor común:

$$x\left[(a-c)x^2 + (c-a)\right] = 0$$

Las tres raíces son: 0, 1 y -1, entre ellas tienen que estar las raíces comunes
Como 0 no es raíz ni de P(x) ni de Q(x), las dos raíces comunes tiene que ser 1 y -1.
Sustituyendo estos valores en P(x) y Q(x) obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} 2 + a + b + c = 0 \\ 2 - a + b - c = 0 \end{cases}$$

que nos da las condiciones:

$$b = -2$$
$$a = -c$$

Los polinomios quedan en la forma:

$$P(x) = x^4 + ax^3 - 2x^2 - ax + 1$$

$$Q(x) = x^4 - ax^3 - 2x^2 + ax + 1$$

Para resolver las ecuaciones $P(x) = 0$, $Q(x) = 0$, separamos por Ruffini las raíces conocida 1 y -1 y quedan las ecuaciones en la forma:

$$P(x) = (x + 1)(x - 1)\,(x^2 + ax - 1) = 0$$

$$Q(x) =(x + 1)(x - 1)\,(x^2 - ax - 1) = 0$$

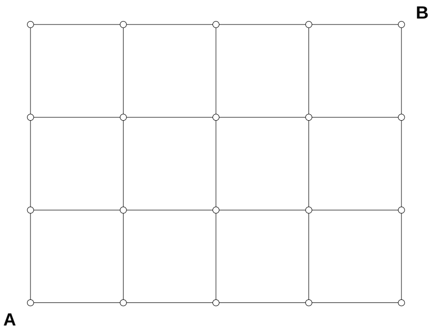
Resolviendo las ecuaciones de segundo grado queda finalmente:
Soluciones de $P(x) = 0$:

$$x = 1;\ \ x = -1;\ \ x = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4}}{2};\quad x = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4}}{2}$$

Soluciones de $Q(x) = 0$:

$$x = 1;\ \ x = -1;\ \ x = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2};\quad x = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4}}{2}$$

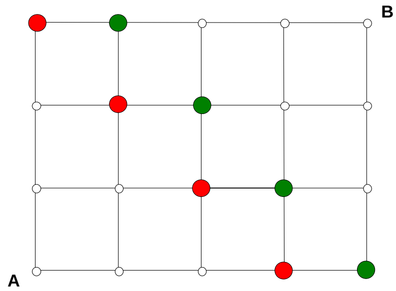
Problema 2.



La figura muestra un plano con calles que delimitan 12 manzanas cuadradas. Una persona P va desde A hasta B y otra Q desde B hasta A.
Ambas parten a la vez siguiendo caminos de longitud mínima con la misma velocidad constante.
En cada punto con dos posibles direcciones a tomar, ambas tienen la misma probabilidad.
Halla la probabilidad de que se crucen.

Solución de Fernando Cruz Robledillo (Madrid 2).

Definamos un sistema de coordenadas con origen en A y unidad el lado de un cuadrado.
Como P y Q recorren caminos de longitud mínima, P sólo puede ir a la derecha o arriba y Q a la izquierda o abajo.
Todos los caminos tienen longitud 7, P y Q sólo se podrán encontrar entre el 3º y el 4º movimiento, se han marcado en rojo todas las posibles posiciones de P tras el tercer movimiento y en verde las de Q.



Caso 1. P llega a (0, 3).

La probabilidad de que P llegue a (0, 3) es: $\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

Sólo se puede cruzar con Q si éste está en (1, 3) lo que sucede también con probabilidad $\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

P está obligado a pasar a (1, 3) pero Q pasa a (0, 3) con probabilidad $\frac{1}{2}$.

La probabilidad de que se crucen entre (0, 3) y (1, 3) es: $\frac{1}{8}\frac{1}{8}\frac{1}{2}=\frac{1}{2^7}$

Caso 2. P llega a (1, 2).

La probabilidad de que P llegue a (1, 2) es $3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8}$ (hay tres modos de llegar (1, 2)).

Sólo se puede cruzar con Q si éste está en (1, 3) o en (2, 2). Distingamos ambos casos:

a) Q llega a (1, 3) con probabilidad $\frac{1}{8}$, entonces se cruzarán entre (1, 2) y (1, 3) si P se mueve hacia (1, 3) y Q hacia (1, 2) ambos movimientos con probabilidad $\frac{1}{2}$.

La probabilidad de cruzarse es $\frac{3}{8}\frac{1}{8}\frac{1}{2}\frac{1}{2}=\frac{3}{2^8}$

b) Q llega a (2, 2) con probabilidad $\frac{3}{8}$, entonces se cruzarán entre (1, 2) y (2, 2) si P se mueve hacia (2, 2) y Q hacia (1, 2) ambos movimientos con probabilidad $\frac{1}{2}$.

La probabilidad de cruzarse es $\frac{3}{8}\frac{3}{8}\frac{1}{2}\frac{1}{2}=\frac{9}{2^8}$

Caso 3. P llega a (2, 1).

Procediendo de modo análogo, la probabilidad de cruzarse entre los puntos (2, 1) y (2, 2) es: $\frac{9}{2^8}$ y la de cruzarse entre (2, 1) y (3, 1) es $\frac{9}{2^8}$.

Caso 4. P llega a (3, 0). La probabilidad de cruzarse entre (3, 0) y (3, 1), es $\frac{3}{2^8}$ y la de cruzarse entre (3, 0) y (4, 0) es $\frac{1}{2^7}$.

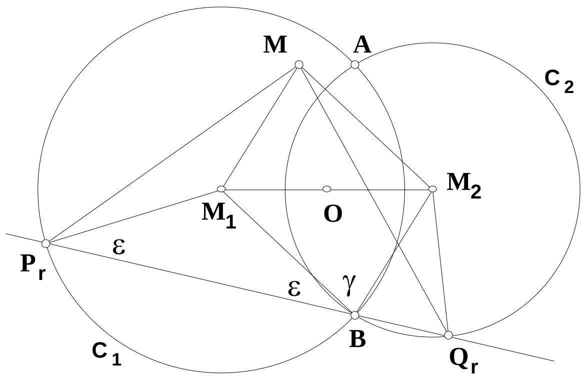
La probabilidad pedida es la suma de todos los caso, resulta:

$$\frac{1}{2^7}+\frac{3}{2^8}+\frac{9}{2^8}+\frac{9}{2^8}+\frac{9}{2^8}+\frac{3}{2^8}+\frac{1}{2^7}=\frac{37}{256}$$

Problema 3.

Dos circunferencias secantes C_1 y C_2 de radios r_1 y r_2 se cortan en los puntos A y B.
Por B se traza una recta variable que corta de nuevo a C_1 y C_2 en dos puntos que llamaremos P_r y Q_r respectivamente.
Demuestra la siguiente propiedad: Existe un punto M, que depende sólo de C_1 y C_2, tal que la mediatriz del segmento P_rQ_r pasa por M.

Solución de Luis Emilio García Martínez (Valencia U. Politécnica):



Sea O el punto medio del segmento M_1M_2.
demostraré que todas las mediatrices de los segmentos P_rQ_r pasan por el simétrico de B respecto de O.
Sean $\varepsilon = \angle P_rBM_1$; $\gamma = \angle M_1BM_2$, Entonces:

$$\angle M_2BQ_r = 180º - (\gamma + \varepsilon)$$

y como el triángulo M_2BQ_r es isósceles,

$$\angle BM_2Q_r = 180º - 2\,\angle M_2BQ_r = -180º + 2\,(\gamma + \varepsilon)$$

y por tanto,

$$\angle MM_2Q_r = 180º - \gamma + \angle BM_2Q_r = 180º - \gamma - 180º + 2\,(\gamma + \varepsilon) = \gamma + 2\,\varepsilon$$

De modo análogo, por ser el triángulo P_rM_1B isósceles, se tiene:

$$\angle\, P_rM_1B = 180º - 2\varepsilon$$

y

$$\angle P_rM_1M = 360º - (\angle P_rM_1B + 180º - \gamma) = 360º - 180º + 2\varepsilon - 180º + \gamma = 2\varepsilon + \gamma$$

Resulta que para cualquier posición de la recta variable los triángulos MM_1Pr y MM_2Qr son iguales y por tanto $MP_r = MQ_r$ y M está en la mediatriz de P_rQ_r.
Como M no depende de la recta variable queda probada la propiedad del enunciado.

Problema 4.

Encuentra el mayor número entero N que cumpla las siguientes condiciones :

a) $E\left(\frac{N}{3}\right)$ tiene sus tres cifras iguales.

b) $E\left(\frac{N}{3}\right)$ es suma de números naturales consecutivos comenzando en 1, es decir, existe un natural n tal que $E\left(\frac{N}{3}\right) = 1 + 2 + ...+ (n\text{-}1) + n$.

Nota: $E(x)$ es la parte entera de x.

Solución de Roberto Alonso Pérez del País Vasco.

Condición a): $z = E\left(\frac{N}{3}\right) = 111 \cdot k; \quad \forall k \in N; \quad 1 \le k \le 9$

Condición b): $z = E\left(\frac{N}{3}\right) = 1 + 2 + 3 + ... + n \Rightarrow z = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow n^2 + n - 2z = 0 \Rightarrow n = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8z}}{2}$

(la otra raíz es negativa).

Juntando las dos condiciones, queda:

$$n = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8 \cdot 111 \cdot k}}{2}$$

Como n es natural, el radicando ha ser cuadrado perfecto lo que ocurre sólo para k = 6 que sustituido en la expresión anterior resulta n = 36.

Recuperando la condición a):

$$z = E\left(\frac{N}{3}\right) = 111 \cdot 6 = 666 \Rightarrow 667 > \frac{N}{3} > 666 \Rightarrow 2001 > N > 1998$$

Por tanto el mayor N que cumple a) y B es N = 2000

Problema 5.

Tomemos cuatro puntos situados en el interior o el borde de un cuadrado de lado 1. Demuestra que al menos dos de ellos están a distancia menor o igual que 1.

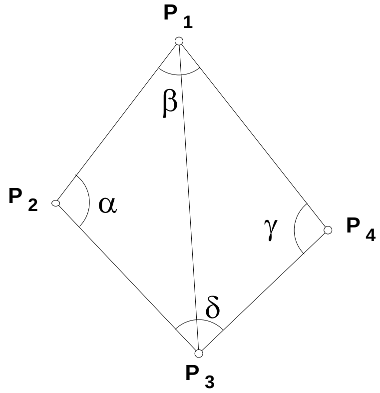
Solución de Manuel Pérez Molina del Alicante.

Vamos a demostrarlo por reducción al absurdo. Supongamos que distribuimos 4 puntos en el cuadrado de manera que cada una de las seis distancias se mayor que 1. Entonces hay dos posibilidades:

a) Los cuatro puntos forman un cuadrilátero convexo.
b) Los cuatro puntos forman un cuadrilátero no convexo.

Veamos ambos casos:

a) sean α, β, γ, δ los ángulos del cuadrilátero convexo. Sabemos que $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360º$. Además cualquier pareja de puntos del interior (o frontera) del cuadrado están a una distancia $d \le \sqrt{2}$ ya que el diámetro de dicho cuadrado es $\sqrt{2}$.



De la condición $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360º$, se deduce que necesariamente uno de los ángulos ha de ser mayor o igual que 90º, digamos por ejemplo $\alpha \ge 90º$.

Tenemos (ver figura):

$$\overline{P_i P_j} > 1, \quad i \ne j$$

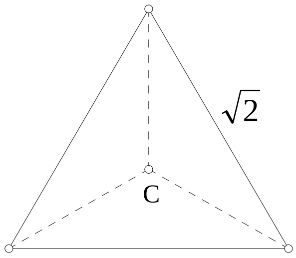
luego

$$\overline{P_1P_3}^2 = \overline{P_1P_2}^2 + \overline{P_2P_3}^2 - 2\overline{P_1P_2}\cdot\overline{P_2P_3}\cos\alpha$$

como el cuadrilátero es convexo, $90º \le \alpha \le 180º$ y por tanto $\cos\alpha \le 0$ y en consecuencia:

$$\overline{P_1P_3}^2 \ge \overline{P_1P_2}^2 + \overline{P_2P_3}^2 > 2 \Rightarrow \overline{P_1P_3} > \sqrt{2}$$

lo que es imposible.
b) Si se forma un cuadrilátero no convexo podemos elegir tres de los cuatro puntos formando un triángulo de modo que el cuarto punto sea interior. Supongamos que el punto interior es P_4.



Cada lado de dicho triángulo es menor o igual que $\sqrt{2}$ (diámetro del cuadrado) y por tanto estará contenido en un triángulo equilátero de lado $\sqrt{2}$, y circunradio $\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{2}{3} = \sqrt{\frac{2}{3}} < 1$. Si su centro es C, P_4 estará en el interior de uno de los tres triángulos que resultan de unir C con cada vértice y la distancia de P_4 a uno de los vértices será menor o igual que el circunradio, es decir menor que $\sqrt{\frac{2}{3}}$ y por tanto menor que 1.

hemos encontrado un par de puntos a distancia menor o igual que 1.
Por último si tres puntos están alineados se reduce al caso b) y si los cuatro puntos están alineados llamando x_1, x_2, x_3 a las distancias entre puntos consecutivos, tenemos:

$$x_1 + x_2 + x_3 \le \sqrt{2}$$

y por el principio del palomar, uno de ellos, digamos x_1, cumple: $x_1 \le \frac{\sqrt{2}}{3} < 1$.

Problema 6.

Demuestra que no existe ninguna función $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ que cumpla: $f(f(n)) = n + 1$.

Solución de Alberto Suárez Real de Oviedo.

Supongamos que exista $f : N \to N \mid f(f(n)) = n+1$.
Se tiene que $f(0) = a \in N$. Por el enunciado:

$$f(f(0)) = 1; \quad f(f(0)) = f(a) = 1$$

del mismo modo, $f(1) = a + 1$, $f(a + 1) = 2$, $f(2) = a + 2$,........
Supongamos que $f(n - 1) = a + n - 1$, entonces $f(a + n -1) = a + n$ luego hemos probado por inducción que

$$f((n)) = f(a+n) = 2a+n$$

entonces,

$$2a + n = n + 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \notin N$$

hemos llegado a una contradicción y la condición supuesta es falsa con lo que queda demostrado la inexistencia de la función f.

RESPUESTAS DE LA XXXVII OLIMPIADA ESPAÑOLA

Primera sesión

1.- Prueba que la gráfica del polinomio P es simétrica respecto del punto $A(a,b)$ sí y sólo sí existe un polinomio Q tal que: $P(x) = b + (x-a)Q((x-a)^2)$, para todo $x \in R$.

Solución:
Supongamos primero que exista el polinomio P que cumple las condiciones requeridas. Sea $x - a = h$ ó $x = a + h$. Entonces :

$$\begin{cases} P(a-h) = b - hQ(h^2) \\ P(a+h) = b + hQ(h^2) \end{cases} \quad \text{y} \quad \frac{P(a-h)+P(a+h)}{2} = b, \text{ para todo } h \in R.$$ Lo que significa

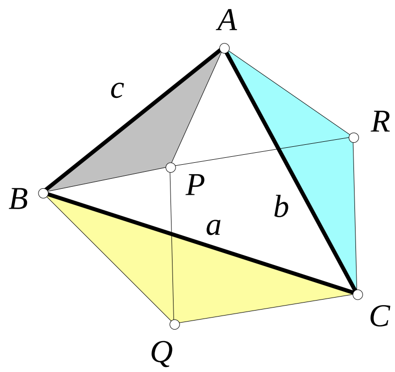
que la gráfica de P es simétrica respecto del punto $A(a,b)$.

Sea $x = a + h$, $P(x) = P(a+h) = R(h)$. La condición $\frac{P(a-h)+P(a+h)}{2} = b$ es equivalente a $R(-h) + R(h) = 2h$, porque $P(a-h) = R(-h)$. Para $R(h) = a_0 + a_1 h + ... + a_n h^n$, la condición anterior se escribe de la forma: $a_0 + a_1 h + ... + a_n h^n + a_0 - a_1 + a_2 h^2 - ... + (-1)^n a_n h^n = 2b$ es decir $a_0 + a_2 h^2 + ... + a_m h^m = b$, para cada $h \in R$. $m = n$ n par, $m = n - 1$ n impar.

Se deduce que $a_2 = a_4 = ... = a_m = 0$, $a_0 = b$.

Por tanto ahora se tiene que $R(h) = b + a_1 h + a_3 h^3 + ...$ y así existe un polinomio Q tal que $R(h) = b + hQ(h^2)$, para algún polinomio Q. Por último $P(x) = R(h) = b + (x-a)Q((x-a)^2)$.

2.- Sea P un punto, en el interior del triángulo ABC, de modo que el triángulo ABP es isósceles. Sobre cada uno de los otros dos lados de ABC se construyen exteriormente triángulos BCQ y CAR, ambos semejantes al triángulo ABP.
Probar que los puntos P, Q, C y R o están alineados o son los vértices de un paralelogramo.



Solución:
Los triángulos ABC y PBQ son semejantes pues tienen un ángulo igual $\angle ABC = \angle PBQ$ y los lados que lo forman proporcionales:

$$\frac{c}{a} = \frac{BP}{BQ}$$

De modo análogo, ABC es semejante a APR, por tanto PBQ y APR son semejantes (y al ser $PB = PA$ son iguales).
En particular: $\angle ARP = \angle ACB$ y $\angle BQP = \angle ACB$
Llamando $\alpha = \angle BAP = \angle ABP$, resulta:

$$\angle QPR = 360^\circ - (180 - 2\alpha) - (A + B) = 180^\circ + 2\alpha - (180^\circ - \angle ACB) = 2\alpha + \angle ACB$$

$$\angle QCR = \angle ACB + 2\alpha$$

$$\angle PRC = 180^\circ - 2\alpha - \angle ARP = 180^\circ - 2\alpha - \angle ACB$$

$$\angle PQC = 180^\circ - 2\alpha - \angle BQP = 180^\circ - 2\alpha - \angle ACB$$

Las cuatro igualdades establecen que los dos pares de ángulos opuestos del cuadrilátero $PQCR$ son iguales y es un paralelogramo.

La alineación es un caso particular y se producirá cuando $\angle ACB + 2\alpha = 180º$, es decir cuando

$$\alpha = \frac{180º - \angle ACB}{2}.$$

3.- Están dados 5 segmentos de longitudes a_1, a_2, a_3, a_4 y a_5 tales que con tres cualesquiera de ellos es posible construir un triángulo.
Demuestra que al menos uno de esos triángulos tiene todos sus ángulos agudos.

Solución:
Supongamos que $0 < a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le a_5$. Si ningún triángulo es acutángulo, tendríamos:

$$a_1^2 + a_2^2 \le a_3^2 \quad (1)$$
$$a_2^2 + a_3^2 \le a_4^2 \quad (2)$$
$$a_3^2 + a_4^2 \le a_5^2 \quad (3)$$

Pero (desigualdad triangular):

$a_5 < a_1 + a_2$, luego $a_5^2 < a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \quad (4)$

Sumando las desigualdades (1),(2),(3) y (4) tenemos:

$$a_1^2 + 2a_2^2 + 2a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 < a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2$$

es decir,

$$a_2^2 + a_3^2 < 2a_1a_2$$

Como $a_2 \le a_3$, resulta $2a_2^2 \le a_2^2 + a_3^2 < 2a_1a_2$, y por tanto $a_2 < a_1$, en contradicción con la ordenación inicial.

Segunda sesión

4.- Los números enteros desde 1 hasta 9 se distribuyen en las casillas de una tabla 3x3.
Después se suman seis números de tres cifras: los tres que se leen en filas y los tres que se leen en columnas.
¿Hay alguna distribución para la cual el valor de esa suma sea 2001?

Solución:
Consideremos la distribución:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Resulta:

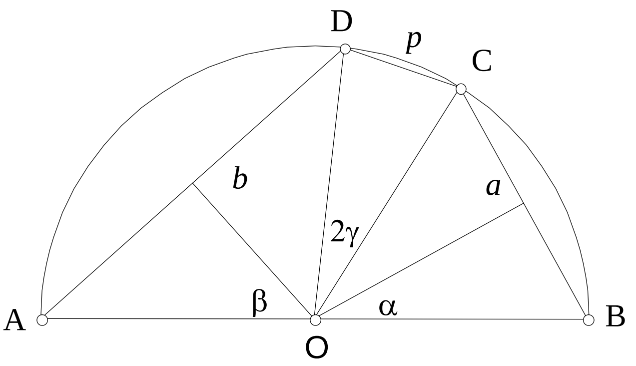
$$S = abc + def + ghi + adg + beh + cfi =$$
$$100\,(a + c + f + b + a + d + g) + 10(d + e + f + b + e + h) + (g + h + i + c + f + i) =$$
$$200\,a + 110b + 101c + 110d + 20e + 11f + 101g + 11h + 2i$$

Módulo 9 tenemos:

$$S = 2(a + b + c + \ldots h + i) = 2.45 = 0$$

Como 2001 no es múltiplo de 9, no habrá ninguna distribución para la que la suma indicada tome el valor 2001.

5.- *ABCD* es un cuadrilátero inscrito en una circunferencia de radio 1 de modo que *AB* es un diámetro y el cuadrilátero admite circunferencia inscrita.
Probar que: $CD \le 2\sqrt{5} - 4$



Solución:
Sea O el centro de la semicircunferencia.
Pongamos a = BC; b = AD; p = CD;
$2\alpha = \angle BOD$; $2\beta = \angle AOD$; $2\gamma = \angle COD$.
La condición necesaria y suficiente para que ABCD admita una circunferencia inscrita es:

$$p + 2 = a + b \quad (1)$$

Como $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180^\circ$, entonces

$$\beta = 90 - (\alpha + \beta)$$

y además:

$$a = 2sen\alpha; \quad p = 2sen\gamma; \quad b = 2sen\beta = 2\cos(\alpha + \gamma) = 2\cos\alpha\cos\gamma - 2sen\alpha\ sen\gamma$$

Vamos a expresar la condición (1) en función del ángulo α y el dato p que determina por completo el cuadrilátero.

$$\cos\gamma = \sqrt{1 - \frac{p^2}{4}} = \frac{\sqrt{4 - p^2}}{2},$$

de donde:

$$b = \sqrt{4 - p^2}\cos\alpha - psen\alpha$$

sustituyendo en (1), queda:

$$p + 2 = 2sen\alpha + \sqrt{4 - p^2}\cos\alpha - psen\alpha$$

o lo que es lo mismo:

$$\sqrt{4 - p^2}\cos\alpha + (2 - p)sen\alpha = p + 2 \quad (2)$$

Por tanto, existirá circunferencia inscrita para los valores de p que hagan compatible la ecuación (2) en la incógnita α.
Puede expresarse el seno en función del coseno y estudiar el discriminante de la ecuación de segundo grado que se obtiene, pero es más rápido interpretar la ecuación (2) como el producto escalar de los vectores $\vec{u}(\cos\alpha, sen\alpha)$ de módulo 1 y $\vec{v}\left(\sqrt{4 - p^2}, 2 - p\right)$. La condición (2) queda:

$$|\vec{v}|\cos\delta = p + 2 \quad (3)$$

siendo δ el ángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
Para que (3) sea compatible debe cumplirse $p + 2 \le |\vec{v}| = \sqrt{4 - p^2 + (2 - p)^2}$, elevando al cuadrado y operando queda:

$$p^2 + 8p - 4 \le 0$$

Las raíces de la ecuación son $p = \pm 2\sqrt{5} - 4$.

Como p es positivo la condición final es:

$$0 \leq p \leq 2\sqrt{5} - 4$$

6.- Determinar la función $f : N \to N$ (siendo $N = \{1,2,3,...\}$ el conjunto de los números naturales) que cumple, para cualesquiera s, $n \in N$, las dos siguientes condiciones:
a) $f(1) = 1$, $f(2^s) = 1$.
b) Si $n < 2^s$, entonces $f(2^s + n) = f(n) + 1$.
Calcular el valor máximo de $f(n)$ cuando $n \leq 2001$.
Hallar el menor número natural n tal que $f(n) = 2001$.

Solución
Para cada número natural n definimos $f(n)$ como la suma de las cifras de la expresión de n escrito en base 2. Está claro que esta función f cumple las condiciones a) y b). Además, es la única función que las cumple, porque el valor de $f(n)$ viene determinado por las condiciones a) y b). Probamos esa afirmación por inducción sobre n. Si $n = 1$ o $n = 2^s$, $f(n) = 1$. Supongamos $n > 1$, $n \neq 2^s$ y que es conocido $f(m)$ para todo $m < n$; se puede escribir $n = 2^s + m$ con $m < 2^s$ tomando 2^s la mayor potencia de 2 que es menor que n; entonces $f(n) = f(m) + 1$.
Ahora, es fácil resolver las dos cuestiones que nos plantean:

En el primer caso, se trata de ver cuántos unos puede tener como máximo un número menor o igual que 2001 escrito en base 2. Ese número, escrito en base 2, es, obviamente, 1111111111, que corresponde a $n = 1023 = 2^{10} - 1$. Es $f(n) = 10$.

En el segundo caso, razonando de manera análoga, se observa que la respuesta es $n = 2^{2001} - 1$.

RESPUESTAS DE LA XXXVIII OLIMPIADA ESPAÑOLA

Problema 1

Hallar todos los polinomios *P(t)* de una variable, que cumplen:

$$P(x^2-y^2)=P(x+y)\cdot P(x-y)$$

para todos los números reales x e y.

La ecuación funcional dada $P(x^2-y^2)=P(x+y)P(x-y)$ (*) es equivalente a la ecuación funcional $P(uv)=P(u)P(v)$ (**) con el cambio de variables $u=x+y$ y $v=x-y$, para todos $u,v\in R$.

Poniendo $u=v=0$ en (**) se obtiene $P(0)=(P(0))^2$, de donde $P(0)=1$ ó $P(0)=0$. Sea $P(0)=1$, haciendo $v=0$ en (*) se deduce que $P(0)=P(u)P(0)$ para todo $u\in R$, es decir $P(u)\equiv 1$. Sea ahora $P(0)=0$. Entonces $P(u)=uQ(u)$, siendo $Q(u)$ un polinomio de grado una unidad inferior al grado de $P(u)$. Fácilmente se comprueba que $Q(u)$ satisface la ecuación funcional (**). Por tanto $P(u)=u^n$ con $n\in N$.

Recíprocamente se comprueba sin dificultad que $P(x)\equiv 1$ y $P(x)=x^n$ con $n\in N$ satisfacen la ecuación funcional inicial (*).

También puede hacerse sin el cambio de variable haciendo $x=y=0$ se llega a $P(0)=(P(0))^2$.

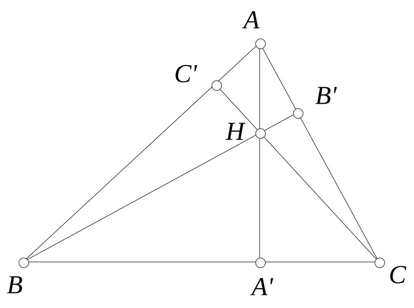
Además está la solución trivial $P(x)\equiv 0$.

Problema 2

En un triángulo *ABC*, *A'* es el pie de la altura relativa al vértice *A* y *H* el ortocentro.

a) Dado un número real positivo k tal que $\dfrac{AA'}{HA'}=k$, encontrar la relación entre los ángulos *B* y *C* en función de k.

b) Si *B* y *C* son fijos, hallar el lugar geométrico del vértice *A* para cada valor de *k*.



a) Tenemos:

$$BA'=c\cos B;\quad \operatorname{tg} HBA'=\operatorname{ctg} C=\frac{HA'}{BA'},\quad AA'=c\operatorname{sen} B.$$

De donde:

$$k=\frac{AA'}{HA'}=\frac{c\operatorname{sen} B}{c\cos B\operatorname{ctg} C}\Leftrightarrow \operatorname{tg} B\cdot\operatorname{tg} C=k\quad (1)$$

b) Poniendo $a=BC$, tomando unos ejes con origen en el punto medio de *BC* y eje OX sobre el lado *BC*, resulta $B\left(-\dfrac{a}{2},0\right)$; $C\left(\dfrac{a}{2},0\right)$ y llamando *A(x, y)*, la condición (1) se escribe:

$$\frac{y}{\frac{a}{2}-x}\cdot\frac{y}{\frac{a}{2}+x}=k\Leftrightarrow y^2=k\left(\frac{a^2}{4}-x^2\right)$$

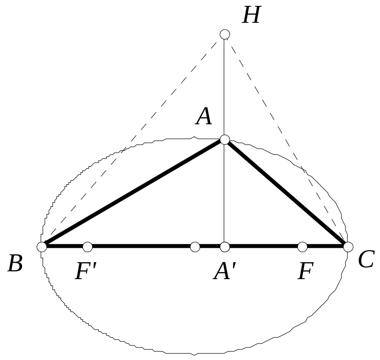
que, una vez operada resulta:

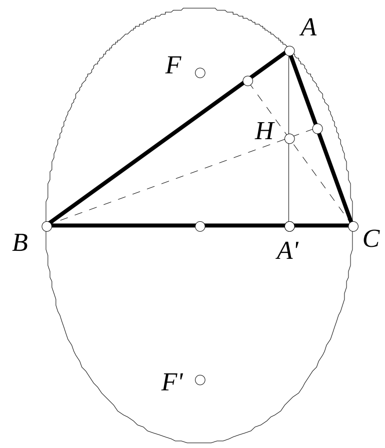
$$\frac{x^2}{\frac{a^2}{4}}+\frac{y^2}{\frac{ka^2}{4}}=1 \quad (2)$$

ecuación de una elipse en la que distinguimos dos casos:

Si $k<1$, elipse con eje mayor sobre OX, semidistancia focal = $\frac{a}{2}\sqrt{1-k}$ y semieje mayor = $\frac{a}{2}$

Si k >1, elipse con eje mayor sobre OY, semidistancia focal = $\frac{a}{2}\sqrt{k-1}$ y semieje mayor = $\frac{a}{2}\sqrt{n}$.





Problema 3

La función *g* se define sobre los números naturales y satisface las condiciones:

- $g(2)=1$
- $g(2n)=g(n)$
- $g(2n+1)=g(2n)+1$

Sea *n* un número natural tal que $1 \le n \le 2002$. Calcula el valor máximo *M* de $g(n)$. Calcula también cuántos valores de *n* satisfacen $g(n)=M$.

Para cualquier natural *n*, consideramos su representación binaria,

$$n=a_k 2^k+a_{k-1}2^{k-1}+\ldots+a_1 2+a_0=a_k\ldots a_1 a_{0(2)},$$

donde $a_j = 0$ o 1.

Probaremos por inducción que $g(n)=\sum_{j=0}^{k} a_j$ por inducción sobre *k*:

Para $k=0$ es cierto: $g\left(1_{(2)}\right)=g(1)=1$. Supuesto cierto para *k*, hay dos casos para $k+1$:

$$g\left(a_k\ldots a_1 a_0 0_{(2)}\right)=g\left(2\cdot a_k\ldots a_1 a_{0(2)}\right)=\sum_{j=0}^{k} a_j,$$

$$g\left(a_k\ldots a_1 a_0 1_{(2)}\right)=g\left(1+2\cdot a_k\ldots a_1 a_{0(2)}\right)=1+\sum_{j=0}^{k} a_j$$

donde se han aplicado las propiedades de *g* y la hipótesis inductiva.
Entonces $g(n)$ es el número de unos de *n* escrito en base 2.

Como $2^{11} = 2048 > 2002 > 1024 = 2^{10}$, resulta $M = 10$.
Hay cinco soluciones de $g(n) = 10$: 1023, 1535, 1791, 1919 y 1983.

Problema 4

Sea n un número natural y m el que resulta al escribir en orden inverso las cifras de n. Determinar, si existen, los números de tres cifras que cumplen $2m + S = n$, siendo S la suma de las cifras de n.

$$n = abc = c + 10b + 100a;$$
$$m = cba = 100c + 10b + a$$

$2m + S = n$ nos da:

$$200c + 20b + 2a + (a + b + c) = 100a + 10b + c,$$

es decir

$$200c + 11b - 97a = 0.$$

Por lo tanto, $200c - 97a$ es múltiplo de 11.
Módulo 11: $2(c + a)$ es 0, y como mcd (2,11) = 1, resulta que $a + c$ es congruente con 0 módulo 11.
Módulo 9: $2(c + a + b)$ congruente con 0, y $c + a + b$ congruente con 0.
Por la primera congruencia, $c + a = 0$, o bien $c + a = 11$.
Si $c + a = 0$, entonces $a = c = 0$ y no hay solución por ser números de tres cifras.
Si $c + a = 11$, entonces $b = 7$.
Por lo tanto, $200c - 97a$ es múltiplo de 7.
Trabajando módulo 7: $4c + a$ es congruente con 0 módulo 7, es decir;

$$4c + a = 0, 7, 14, 21, 28, 35, 42.$$

Como $a + c = 11$, tenemos que $3c$ debe tomar uno de los valores -11, -4, 3, 10, 17, 24, o 31 y ser múltiplo de 3. Luego $c = 1$ o $c = 8$.
Si $c = 1$, entonces $a = 10$, imposible.
Si $c = 8$, $a = 3$. Pero $n = 378$ no es solución y no existen números con las condiciones pedidas.

Problema 5

Se consideran 2002 segmentos en el plano tales que la suma de sus longitudes es la unidad. Probar que existe una recta r tal que la suma de las longitudes de las proyecciones de los 2002 segmentos dados sobre r es menor que $\frac{2}{3}$.

Cada segmento determina dos vectores de igual módulo y sentido opuesto.
Consideramos los 2 x 2002 = 4004 vectores así obtenidos y los ordenamos por sus direcciones entre 0 y 2π respecto de un sistema de referencia ortonormal arbitrario. Construimos ahora un polígono convexo de 4004 lados "uniendo" los vectores uno a continuación del otro, a partir de uno cualquiera dado. Claramente el perímetro de este polígono es 2 Además es un polígono centrado y simétrico, respecto de un punto O (la prueba de esta observación es sencilla y es necesario hacerla).
Tomamos entonces uno de los lados más próximos a O; sea d el segmento perpendicular a ese lado

y a su opuesto que pasa por el centro O. La proyección del polígono sobre la recta que contiene a este segmento es d y por tanto la suma de las proyecciones sobre la recta anterior es también d. Por otra parte la circunferencia de centro O y radio $\frac{d}{2}$ está totalmente contenida en el interior del polígono y entonces su circunferencia es menor que el perímetro del polígono.
Es decir: $d\pi < 2$ y $d < \frac{2}{\pi} < \frac{2}{3}$.
Falta considerar el caso trivial de que todos los segmentos tengan la misma dirección en cuyo caso ni hay polígono pero tomando la recta perpendicular a la dirección común sale $d = 0$.

Problema 6

En un polígono regular H de $6n + 1$ lados (n entero positivo), r vértices se pintan de rojo y el resto de azul. Demostrar que el número de triángulos isósceles que tienen sus tres vértices del mismo color no depende del modo de distribuir los colores en los vértices de H.

Debido a que el número de lados del polígono H deja de resto uno al dividirse entre seis, cada diagonal y cada lado del mismo pertenece sólo (exactamente) a tres triángulos isósceles distintos (la demostración es sencilla y se debe hacer).
Denotamos por AA, AR y RR los números de segmentos que son lados y diagonales cuyos extremos respectivamente están coloreados ambos de azul, de azul y de rojo o ambos de rojo.
Análogamente denotamos por AAA, AAR, ARR y RRR el número de triángulos isósceles cuyos vértices son los tres azules, dos azules y uno rojo, uno azul y el otro rojo o los tres rojos y ninguno azul, respectivamente.
Entonces $3\times AA = 3\times AAA + AAR,$ porque cada diagonal o lado de H pertenece a tres triángulos isósceles y los triángulos isósceles con tres vértices azules tienen tres lados con sus dos extremos azules. Los triángulos isósceles con dos vértices azules tienen sólo un lado con sus extremos de color azul y los triángulos isósceles con menos de dos vértices azules no tiene ningún lado con los extremos del mismo color azul.
Análogamente establecemos: $3\times RA = 2\times AAR + 2\times ARR$ y $3\times RR = ARR + 3\times RRR.$
(se deben probar estas dos nuevas relaciones). Las tres relaciones obtenidas conducen a que:

$$AAA + RRR = RR + AA - \frac{1}{2}\times RA = \frac{1}{2}\times R\times(R-1) + \frac{1}{2}\times A\times(A-1) - \frac{1}{2}\times R\times A,$$

donde A es el número de vértices azules, $A = 6n + 1 - R.$ Esto completa la prueba.
Se observa que el resultado es también cierto si el polígono H tiene $6n + 5$ lados.

RESPUESTAS DE LA XIL OLIMPIADA ESPAÑOLA

Problema 1

Probar que para cualquier primo *p* distinto de 2 y 5 existe un múltiplo de *p* cuyas cifras son todas nueves. Por ejemplo si *p* = 13, 999999 = 13·76923

Solución de Luis Hernández Corbato de Madrid.

Sea a_i el número compuesto por *i* nueves $a_i = \overbrace{99\ldots9}^{i}$. Supongamos que $\exists p$ tal que
$p \nmid a_i \ \forall i \in \mathbb{N}$ para probar por contradicción el enunciado.
Considérense en dicho caso los números $\{a_1, a_2, \ldots a_p\}$, en este conjunto sabemos que no hay ningún $a_i \equiv 0\,(p)$ (por hipótesis) . Por tanto al haber *p* números y sólo *p* – 1 restos posibles módulo *p*, se sabe que existen *m*, *n* tales que $a_m - a_n \equiv 0\,(p)$.
Suponemos sin pérdida de generalidad que *m* > *n* y:

$$p \mid a_m - a_n = \overbrace{99\ldots9}^{m} - \overbrace{99\ldots9}^{n} = \overbrace{99\ldots9}^{m-n}\overbrace{00\ldots0}^{n} = a_{m-n} \cdot 10^n$$

Como $p \neq 2$ y $p \neq 5 \Rightarrow p \nmid 10^n = 2^n \cdot 5^n \Rightarrow p \mid a_{m-n}$ y como a_{m-n} pertenece al conjunto escogido por ser $m - n < n$ y $m - n \geq 1$ se ha llegado a una contradicción. Por ende:

$$\forall p\ \exists a_i \text{ tal que } p \mid a_i$$

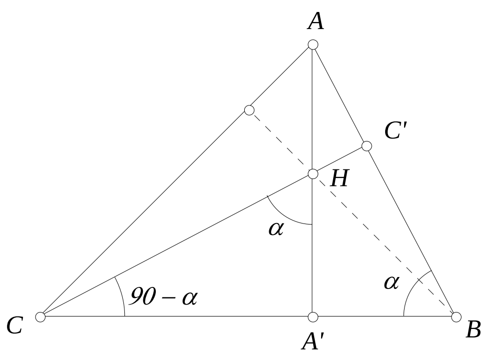
y el enunciado queda probado.

Problema 2

¿Existe algún conjunto finito de números reales *M* que contenga al menos dos elementos distintos y que cumpla la propiedad de que para dos números *a*, *b* cualesquiera de *M*, el número $2a - b^2$ sea también un elemento de *M*?

Solución de Víctor González Alonso de Burgos.

Como M es finito, necesariamente estará acotado.
Pongamos $M \subset [x, y]$, con *x* = Mín *M* e y = Máx *M*. Supongamos $x \leq 0$:
Tenemos $x \leq 0 \Rightarrow 2x \leq x \Rightarrow 2x - k^2 < x$ (*k* cualquier número de *M*). Esto contradice que *x* sea el mínimo de *M*. Por tanto *x* > 0 y 0 < *x* < *y*.
En cualquier casi debe ser:
(1) $x \leq 2x - y^2 \leq y$ y además (2) $x \leq 2y - y^2 \leq y$.
De (1) se desprende que : $x \leq 2x - y^2 \Rightarrow 0 \leq x - y^2 \Rightarrow y^2 \leq x < y$; que sólo se cumple si $y \in (0, 1)$.
De (2) obtenemos que: $2y - y^2 \leq y \Rightarrow y - y^2 \leq 0 \Rightarrow y \leq y^2$; y
esto sólo es cierto si $y \in [1, +\infty)$.
Como (1) y (2) deben cumplirse a la vez, no existe ningún $y \in$ R que pueda ser máximo de *M* por lo que no estaría acotado y no sería finito.

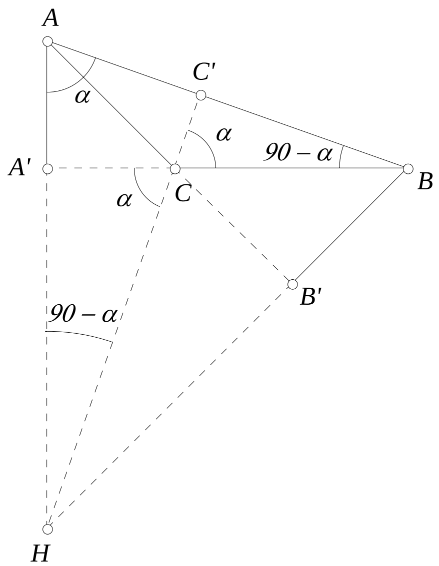


Problema 3

Las alturas del triángulo ABC se cortan en el punto H. Se sabe que $AB = CH$. Determinar el valor del ángulo $\angle BCA$.

Solución de Ibón Arregui Bilbao del País Vasco.

Ángulo $C < 90º$.
Llamaremos A' al punto en que la altura de A corta al lado BC del triángulo ABC, y C' al punto donde la altura de C corta al lado AB del triángulo ABC.
El ángulo $\angle CHA'$ es igual al ángulo $\angle AHC'$. En el triángulo $CA'H$, el ángulo $\angle CA'H$ es recto, por tanto el ángulo $\angle HCA'$ es 90º - α . En el triángulo AHC' el ángulo $\angle HC'A$ es recto, por tanto el ángulo $\angle HAC'$ es 90º - α .
El ángulo $\angle HAC'$ es igual al ángulo $\angle A'AB$ del triángulo $A'AB$ que es rectángulo por tanto el ángulo $\angle A'BA$ es α.
De aquí concluimos que los triángulos CHA' y $A'AB$ son semejantes, y como $CH = AB$, son triángulos iguales de donde obtenemos que $AA' = CA'$, por tanto el valor de tg $C = 1$, y $C = 45º$.



Ángulo $C > 90º$.
Procediendo de modo análogo el ángulo $\angle A'CH$ es igual al ángulo $\angle C'CB$. En el triángulo $C'CB$ el ángulo $\angle CA'H$ es recto, por tanto el ángulo $\angle A'HC$ es 90º - α y en el triángulo $CC'B$ el ángulo $\angle CC'B$ es recto y por tanto $\angle C'BC$ es 90º - α.
El triángulo $AA'B$ es rectángulo en A' y por ello $\angle BAA'$ es α.
Entonces los triángulos $AA'B$ y $A'CH$ son semejantes y tienen la hipotenusa igual, luego son iguales y deducimos $AA' = A'C$, entonces la tangente de C vale –1 y $C = 135º$.

Finalmente, si fuese $C = 90º$, C coincide con H y $CH = 0$.
Como $AB \neq 0$, este valor de C no es válido.

Problema 4

Sea x un número real tal que $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$. Demostrar que tanto x como x^2 son irracionales.

Solución:
Primero veamos que x no puede ser entero. Esto puede hacerse teniendo en cuenta que si lo fuese, sería un divisor de 20, y basta probar los 8 divisores para comprobar que ninguno verifica la ecuación.
Otro modo de verlo es comprobar que $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$ es estrictamente creciente (su derivada es positiva para todo x) y además $f(1) = 13$ y $f(2) = 36$.
Luego no hay raíces enteras.
Veamos que x no puede ser racional por reducción al absurdo. Supongamos que $x = p/q$ con $q \geq 1$ y p/q irreducible. Entonces

$$p^3 = 20q^3 - 10q^2 p - 2qp^2 = q\left(20q^2 - 10qp - 2p^2\right)$$

Si q fuera estrictamente mayor que 1, la igualdad anterior estaría en contradicción con la hipótesis de que p/q es irreducible. Por tanto $q = 1$, x sería entero lo que es imposible. Luego x es irracional. Para la irracionalidad de x^2 basta ver que

$$x\left(x^2+10\right)=20-2x^2 \Rightarrow x=\frac{20-2x^2}{x^2+10},$$

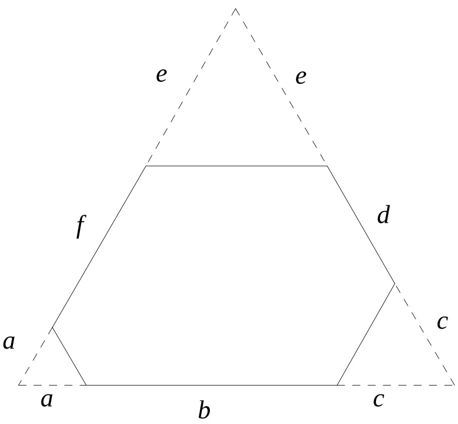
y si x^2 fuese racional, también los sería x en contra de lo probado.

Problema 5

¿Cuáles son las posibles áreas de un hexágono con todos los ángulos iguales y cuyos lados miden 1, 2, 3, 4, 5 y 6 en algún orden?

Solución:
La idea es prolongar los lados para formar un triángulo equilátero.

$$a + b + c + d + e + f = 21$$
$$l = a + b + c = c + d + e = e + f + a$$
$$3l = 21 + a + c + e, \text{ por tanto}$$
$$l = 7 + (a + c + e) / 3$$



El valor más pequeño de $a + c + e$ es 6 y el más grande 15 así que

$$9 \le l \le 12$$

Si $a + c + e = 6$, entonces son:
$(a, c, e) = (1, 2, 3)$ y $(b, c, d) = (4, 5, 6)$
Si $a + c + e = 9$ el único caso posible es:
$(a, c, e) = (1, 3, 5)$ y $(b, c, d) = (2, 4, 6)$
Si $a + c + e = 12$ el único caso posible es $(a, c, e) = (2, 4, 6)$
Si $a + c + e = 15$ el único posible es (4, 5, 6).

Como el área del triángulo de lado l es $l^2\frac{\sqrt{3}}{4}$ y la del hexágono es $\frac{\sqrt{3}}{4}\left[l^2-\left(a^2+c^2+e^2\right)\right]$, las áreas posibles son:

Si $a + c + e = 6$, entonces $l = 9$ y el área $\frac{67\sqrt{3}}{4}$

Si $a + c + e = 9$, entonces $l = 10$ y el área $\frac{65\sqrt{3}}{4}$

Si $a + c + e = 4$, entonces $l = 11$ y el área $\frac{65\sqrt{3}}{4}$

Si $a + c + e = 5$, entonces $l = 12$ y el área $\frac{67\sqrt{3}}{4}$

Problema 6

Ensartamos $2n$ bolas blancas y $2n$ bolas formando una cadena abierta. Demuestra que, se haga en el orden que se haga, siempre es posible cortar un segmento de cadena exactamente con n bolas blancas y n bolas negras.

Solución de Mohammed Blanca Ruiz de Valencia.

Tenemos la cadena con el total de $4n$ bolas, $2n$ blancas y $2n$ negras. Cogemos un grupo de un extremos con $2n$ bolas, este grupo tendrá x bolas negras e y bolas blancas, de forma que la diferencia es $x - y = 2k$ para $k \in \{-n, 1-n, \ldots, 0, \ldots n-1, n\}$.

Vamos moviéndonos de una en una posición hacia el extremo contrario, en cada movimiento la diferencia varía en 2 o no varía, es decir k aumente en 1, disminuye en 1 o no cambia.
La diferencia varía en 2 si la bola que se deja y que se coge son de distinto color y no se mantiene si son del mismo color.
La posición final, es decir en el otro extremo, tendrá las bolas al revés, x bolas blancas e y bolas negras con lo que la diferencia (blancas - negras) será ahora $y - x = -2k$, para el mismo k.
Es decir que k pasa de una posición a su opuesta con el mismo valor absoluto. Como k sólo puede variar de 1 en 1 tiene que pasar por el cero ya que no se lo puede saltar.
En el momento en que $k = 0$, $x = y = n$, c.q.d.
Siempre se podrá cortar un segmento de longitud $2n$ con n bolas blancas y n bolas negras.

RESPUESTAS DE LA XL OLIMPIADA ESPAÑOLA

Problema 1

Tenemos un conjunto de 221 números reales e cuya suma es 110721. Los disponemos formando un rectángulo de modo que todas las filas y la primera y última columna son progresiones aritméticas de más de un elemento. Probar que la suma de los elementos de las cuatro esquinas vale 2004

Solución

Denotaremos por a_i^j al elemento de la fila *i*-ésima y columna *j*-ésima del rectángulo

Pongamos n para el número de filas, m para el de columnas y S para la suma de los $n\cdot m$ elementos. Con notación matricial queda:

$$M = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^m \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}$$

Sumando por filas y llamando S_k a la suma de la fila k, resulta:

$$S_1 = \frac{a_1^1 + a_1^m}{2}\cdot m$$

$$S_2 = \frac{a_2^1 + a_2^m}{2}\cdot m$$

....

$$S_n = \frac{a_n^1 + a_n^m}{2}\cdot m$$

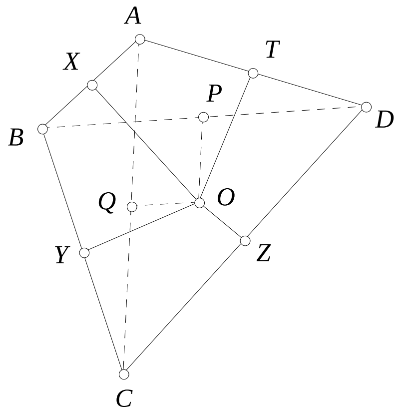
y sumando miembro a miembro queda:

$$S = S_1 + S_2 + \ldots + S_n = \frac{m}{2}\left[\left(a_1^1 + a_2^1 + \ldots + a_n^1\right) + \left(a_1^m + a_2^m + \ldots + a_n^m\right)\right] = \frac{n\cdot m}{4}\left(a_1^1 + a_n^1 + a_1^m + a_n^m\right)$$

$$a_1^1 + a_n^1 + a_1^m + a_n^m = \frac{4S}{n\cdot m} = \frac{4\cdot 110721}{221} = 2004$$

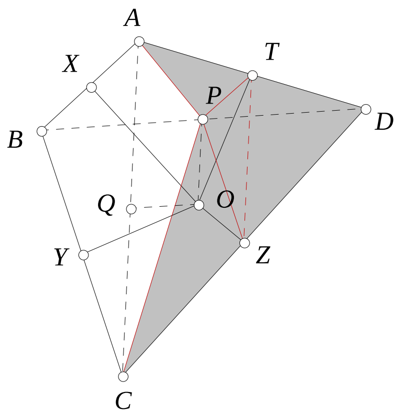
Problema 2

ABCD es un cuadrilátero cualquiera, *P* y *Q* los puntos medios de las diagonales *BD* y *AC* respectivamente. Las paralelas por *P* y *Q* a la otro diagonal se cortan en *O*.
Si unimos *O* con las cuatro puntos medios de los lados *X*, *Y*, *Z* y *T* se forman cuatro cuadriláteros, *OXBY*, *OYCZ*, *OZDT* y *OTAX*.
Probar que los cuatro cuadriláteros tienen la misma área.



Solución 1 ("oficial").

Bastará probar que el área de cada cuadrilátero es la cuarta parte del área total.
La quebrada *APC* divide al cuadrilátero en dos partes de igual área pues *AP* es la mediana de *ABD* y *PC* lo es de *CBD*.
La quebrada *TPZ* divide al cuadrilátero *APCB* (sombreado) en dos partes de igual área pues *PT* es mediana de *APD* y *PZ* es mediana de *CPD*.



Tenemos ya probado que el área del cuadrilátero *TPZD* es la cuarta parte del área del cuadrilátero inicial.
Finalmente *TZ* es paralela a *OP* por serlo ambas a *AC*; luego los triángulos *TPZ* y *TOZ* tienen la misma área y lo mismo les ocurre a los cuadriláteros *TPZD* y *TOZD*.
Del mismo modo se probaría para los otros tres cuadriláteros.

Solución 2 (de la concursante Elisa García Lorenzo)

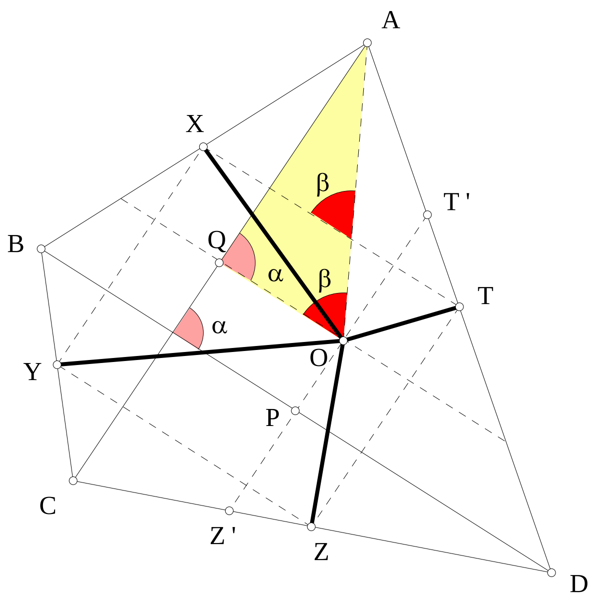
La fórmula de la superficie del cuadrilátero es:

$$S = \frac{AC \cdot BD \cdot sen\alpha}{2}$$

Además $ZT = XY = \dfrac{AC}{2}$ al ser *ZT* la paralela media del triángulo *ACD* y *XY* la paralela media del triángulo *ABC*.

Igualmente: $XT = ZY = \dfrac{BD}{2}$

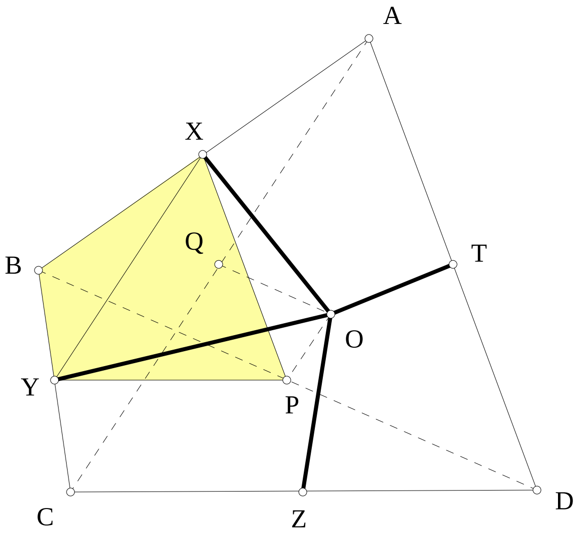
Para probar el enunciado bastará probar que:



$$\frac{AC \cdot BD}{2} sen\alpha = 4\frac{XT \cdot AO}{2} sen\beta$$
$$AC \cdot BD \cdot sen\alpha = 2XT \cdot AO \cdot sen\beta$$
$$ACsen\alpha = 2AOsen\beta$$
$$AQsen\alpha = AOsen\beta$$
$$\frac{AQ}{sen\beta} = \frac{AO}{sen\alpha}$$

que es el teorema del seno en el triángulo *AQO*.
Queda probado el enunciado por extensión de la demostración a los 4 cuadriláteros pequeños que resultan ser una cuarta parte de grande.

Solución 3 (de Marco Castrillón López).



Al ser *OP* paralela a *AC*, los triángulos *OXY*, *PXY* tienen la misma base e igual altura y por tanto la misma área.
De ahí que los cuadriláteros *OXBY*, *PXBY* también tienen la misma área, pero el área de *PXBY* (en amarillo en la figura) es la cuarta parte del cuadrilátero inicial al ser semejantes con razón 2 del grande al pequeño.

Problema 3
Se representa por Z el conjunto de todos los enteros. Hallar todas las funciones $f: Z \to Z,$ tales que para cualesquiera x, y enteros se verifica:

$$f(x+f(y)) = f(x) - y.$$

Solución:

Primeramente observemos que $f(x+nf(y)) = f(x) - ny.$
Para $n = 0$ es obvio, y por inducción suponiendo que para cada entero $n \geq 1$

$$f(x+(n-1)f(y)) = f(x) - (n-1)y,$$

entonces:

$$f(x+n\,f(y)) = f(x+(n-1)f(y)+f(y)) = f(x+(n-1)f(y)) - y =$$
$$= f(x) - (n-1)y - y = f(x) - ny.$$

Análogamente se prueba para cada entero $n \leq -1.$
Por tanto

$$f(1+f(1)\cdot f(1)) = 0.$$

Poniendo $k = 1 + f(1)\cdot f(1) = 1 + f(1)^2 > 0,$ se tiene $f(x) = f(x+f(k)) = f(x) - k,$ que es una contradicción.
Deducimos que no existen funciones que satisfagan la condición requerida.

Problema 4
¿Existe alguna potencia de 2 que al escribirla en el sistema decimal tenga todos sus dígitos distintos de cero y sea posible reordenar los mismos para formar con ellos otra potencia de 2?. Justificar la respuesta

Solución 1 ("oficial"):
Supongamos que exista tal potencia de 2, es decir, que haya dos potencias de 2 cuyas expresiones decimales sólo difieran en el orden de colocación de los dígitos. Claramente ninguna de las dos potencias es divisible por 3, y ambas dejan el mismo resto cuando se dividen por 9. Esto último se debe a que el resto de un número al dividirse por 9 es congruente, módulo 9, con la suma de sus dígitos.
Por otra parte la mayor de ambas potencias se obtiene de la menor multiplicando ésta por $2, 4$ u 8 (de otra manera no tendrían ambas el mismo número de dígitos). Sin embargo al multiplicar la menor potencia de las dos por $2, 4$ u 8, cambia el resto cuando se divide por 9. Los restos de las sucesivas potencias de 2 al dividirse por 9 forman una sucesión periódica. Efectivamente, los restos de: $2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, ...,$ son:
$2, 4, 8, 7, 5, 1, 2, 4, 8, 7, 5, 1, ...$
Esta sucesión tiene periodo 6, porque para todo n entero positivo

$$2^{n+6} - 2^n = 2^n(2^6 - 2^0) = 63 \cdot 2^n,$$

y este número es divisible por 9, por lo que ambas potencias dejan el mismo resto.
No es posible por tanto, reordenar los dígitos de una potencia de 2 para obtener otra potencia distinta de 2.

Solución 2 (del concursante Lander Ramos Garrido).
No existe ningún número que cumpla las condiciones del enunciado. En primer lugar, ambos deben tener las mismas cifras lo que implica que el número de cifras sea el mismo, así que el cociente entre ambos no debe ser mayor que 8, porque si fuera 16 se alteraría el número de cifras.
Otra condición que han de cumplir es, obviamente, que la suma de sus cifras sea la misma. Como duplicar un número implica que la nueva suma de sus cifras sea el doble de la antigua menos $9x$, donde x es el número de llevadas ya que a cada llevada restas 10 a un número y sumas 1 al siguiente. Para que la suma fuera igual tiene que cumplirse

$$2y - 9x = 0$$

siendo y la suma de las cifras antiguas.
Entonces y debe ser múltiplo de 9 para que se cumpla la ecuación anterior ya que en caso contrario habría "medias llevadas", absurdo.
Si y es múltiplo de 9, según el criterio de divisibilidad, el número también debería ser múltiplo de 9, pero como estamos tratando potencias de 2, no habrá ningún número que cumpla esas características.
Para 4 y 8 el proceso es parecido, las fórmulas serían:
Para 4: (z son las llevadas en la segunda duplicación).

$$2(2x - 9y) - 9x = 0 \Leftrightarrow 4x - 18y - 9z = 0 \Leftrightarrow 4x = 9(2y + z)$$

Tampoco podría ser ya que $2y + z$ es un natural.
Para 8: (a son las llevadas en la tercera duplicación).

$$2\left[4x - 9(2y + z)\right] - 9a = 0 \Leftrightarrow 8x = 9(4y + 8z + a).$$

Y tampoco podría ser.

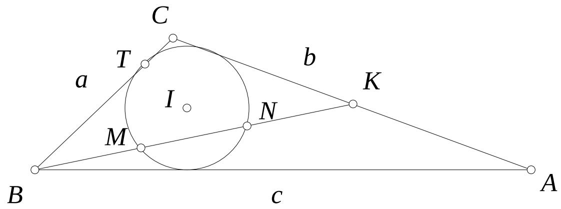
Problema 5
Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que, en el triángulo *ABC*, la mediana desde *B* sea dividida en tras partes iguales por la circunferencia inscrita en el triángulo, es

$$\frac{a}{5}=\frac{b}{10}=\frac{c}{13}$$

Solución.
a) la condición es necesaria. Sea *ABC* un triángulo tal que la mediana *BK* (*K* punto medio de *AC*) corte a la circunferencia inscrita en dos puntos, *M* y *N*, tales que

$$BM = MN = NK = x$$

Sea *T* el punto de tangencia del círculo inscrito con el lado *BC*.



Las siguientes relaciones se verifican en cualquier triángulo:

$$a+c-b=2BT$$
$$2a^2+2c^2-b^2=4BK^2$$

(La primera se deduce sin más de *BT* + *CT* = *a*, *BT* – *CT* = *c* – *b*; la segunda –fórmula de Apolonio o de la mediana- se puede también obtener completando el triángulo *ABC* hasta obtener un paralelogramo *ABCD*).
Entonces resulta

$$2a^2+2c^2-b^2=36x^2 \quad (1)$$

La potencia del vértice *B* respecto del círculo inscrito se puede escribir de dos maneras:

$$BT^2 = BM \cdot BN ,$$

con lo cual

$$\left(a+c-b\right)^2=8x^2 \quad (2)$$

Como, evidentemente, en el triángulo del problema, los puntos *B* y *K* están igualmente alejados del centro del círculo inscrito, resulta *BC* = *KC*, de donde

$$b=2a$$

Sustituyendo esta última igualdad en (1) y (2), obtenemos

$$c^2-a^2=18x^2, \qquad \left(c-a\right)^2=8x^2$$

y ya que $c-a\neq 0, x\neq 0,$ resulta

$$\frac{c+a}{c-a}=\frac{9}{4}, \text{ de donde } \frac{c}{a}=\frac{13}{5}$$

Por lo tanto,

$$\frac{a}{5}=\frac{b}{10}=\frac{c}{13}.$$

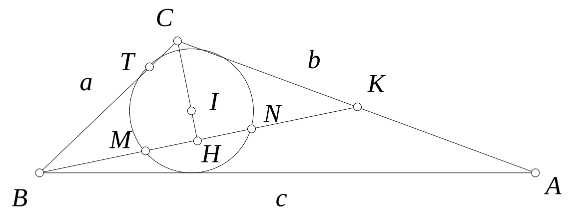
b) la condición es suficiente.

No hay pérdida de la generalidad en suponer que $a = 5$, $b = 10$, $c = 13$.
Sustituyendo los valores de los lados en las fórmulas utilizadas en la parte a), resulta

$$BK = 6\sqrt{2},\ BT^2 = 16 = BM \cdot BN$$

y en el inradio

$$r = \frac{S}{p} = 6\sqrt{14}$$



(calculando S por la fórmula de Herón).
El triángulo BCK es isósceles, así que la bisectriz del ángulo C es también altura. Sea $H = CI \cap BK$; consideremos el triángulo rectángulo BIT; entonces

$$BI^2 = 4^2 + r^2 = \frac{2^2 \times 47}{14}$$

por otra parte, en BIH, $HI^2 = \frac{4}{7}$, y finalmente en IHM, $HM^2 = r^2 - HI^2 = 2$.

Como H es el punto medio de MN, resulta $MN = 2\sqrt{2}$, luego la mediana BK queda, en efecto, dividida en tres partes iguales por el círculo inscrito.

Problema 6
Colocamos, formando una circunferencia, 2004 fichas bicolores: blancas por una cara y negras por la otra. Un movimiento consiste en elegir una ficha **negra**, y dar la vuelta a tres fichas: la elegida, la de su derecha y la de su izquierda. Supongamos que inicialmente hay una sola ficha con la cara negra hacia arriba. ¿Será posible, repitiendo el movimiento descrito, conseguir que todas las fichas tengan la cara blanca hacia arriba? ¿Y si tuviéramos 2003 fichas, entre las cuales exactamente una tiene al comienzo la cara negra hacia arriba?

Solución
Numeremos las fichas desde 1 hasta 2004: la 1 es negra y las restantes son blancas.
Cada ficha inicialmente blanca debe ser "tocada" un número par de veces, para que al final del proceso siga teniendo la cara blanca hacia arriba. Cada movimiento posible cambia el número de fichas negras en un número impar:

B**N**B pasa a NBN : el número de fichas negras aumenta en 1
N**N**B pasa a BBN : el número de fichas negras disminuye en 1
B**N**N pasa a NBB: el número de fichas negras disminuye en 1
N**N**N pasa a BBB: el número de fichas negras disminuye en 3

Como inicialmente hay exactamente una ficha negra, el número total de movimientos para tener las 2004 fichas con la cara blanca hacia arriba debe se impar.
Designamos por x_i el número de movimientos realizados eligiendo la ficha i (que debe ser negra). La ficha que ocupa el lugar i cambia de color en los movimientos en que la elegimos a ella (x_i), a la de su izquierda (x_{i-1}) o a la de su derecha (x_{i+1}). Por lo tanto, ($x_{i-1} + x_i + x_{i+1}$) es el número de veces que hemos dado la vuelta a la ficha que ocupa el lugar i (2004+1 se identifica con 1, y 2003 +2 se identifica con 1)
El número total de movimientos será:

$$N = \left(x_1 + x_2 + x_3\right) + x_4 + \ldots + \left(x_{2002} + x_{2003} + x_{2004}\right)$$

Como 2004 es múltiplo de 3, N es la suma del número de veces que hemos dado la vuelta a las fichas en los lugares 2, 5 ... $3k$+2, ... 2003, todas ellas blancas al principio: así que N, suma de números pares, debería ser par: contradicción, pues N es impar. Por lo tanto, no será posible conseguir que las 2004 fichas tengan la cara blanca hacia arriba.
Con 2003 fichas si es posible: iniciando el movimiento sobre la ficha 1, (única negra al principio), y repitiéndolo sobre las fichas que ocupan los lugares 2 .....2001,2002 llegaríamos a la configuración

NNN NNN .... NNN BB

Eligiendo ahora las fichas que ocupan los lugares 2, 5 ... $3k$+2.... 2000 tendríamos:

BBB BBB .... BBB BB

en la que todas las fichas tendrían la cara blanca hacia arriba.