Problemas para la $\mathbf{19^a}$ Olimpiada Mexicana de Matemáticas

(Problemas Introductorios)

Editado por:

Jesús Jerónimo Castro

José Luis Alonzo Velázquez

Martín Eduardo Frías Armenta

Octavio Arizmendi Echegaray

2005

Jesús Jerónimo Castro
Estudiante, Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

Martín Eduardo Frías Armenta
Profesor-Investigador, Depto. de Matemáticas, Universidad de Sonora.

José Luis Alonzo Velázquez
Estudiante, Facultad de Matemáticas, Universidad de Guanajuato.

Octavio Arizmendi Echegaray
Estudiante, Facultad de Matemáticas, Universidad de Guanajuato.

Contenido

Presentación

La Sociedad Matemática Mexicana organiza la 19^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Los ganadores del certamen formarán las selecciones que participarán en las distintas Olimpiadas Internacionales del año 2006: la XVIII Olimpiada de la Cuenca del Pacífico que se llevará a cabo en el mes de marzo en México y los exámenes se corregirán en Corea, la 47^{a} Olimpiada Internacional se llevará a cabo en Slovenia durante el mes de julio, la XXI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas que se realizará en septiembre en Ecuador y la VIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe que se celebrará en Panamá en el mes de julio.

En la 19^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas pueden participar los estudiantes de México nacidos después del 1^{o} de agosto de 1986. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2005-2006 y, para el 1^{o} de julio de 2006, no deberán haber iniciado estudios de nivel universitario.

La intención de esta publicación es que sirva como orientación a los alumnos que desean participar en estas olimpiadas. Los problemas que aparecen aquí no son ejercicios rutinarios o en los que se apliquen directamente los conocimientos que se adquieren en la escuela, son problemas que requieren de una buena dosis de ingenio y de esfuerzo para ser resueltos. Como en todos los aspectos del aprendizaje de las matemáticas, el esfuerzo individual y el enfrentamiento solitario con los problemas son importantes, pero también es muy importante la discusión con los compañeros y los profesores.

Una forma de manifestar creatividad en matemáticas es resolviendo problemas. Otra forma, que a veces requiere de más madurez, es inventándolos. Invitamos a todos los lectores de este folleto: profesores, estudiantes, olímpicos y exolímpicos a que nos envíen problemas con solución. Las aportaciones serán consideradas

para su inclusión en exámenes o en futuros folletos.
Este folleto incluye problemas de los exámenes estatales de: Aguascalientes, Baja California, Coahuila, Distrito Federal, Estado de México, Hidalgo, Jalisco, Morelos, Nuevo León, San Luis Potosí, Sonora y Zacatecas.

Etapas de la Olimpiada

La Olimpiada Mexicana de Matemáticas consta de tres etapas:

Exámenes Estatales. Estos exámenes servirán para formar las selecciones estatales que asistirán al Concurso Nacional.

Concurso Nacional. Este concurso se llevará a cabo en la ciudad de Campeche, Campeche, del 6 al 12 de noviembre de 2005. En él, se elegirá a la preselección mexicana.

Entrenamientos. A los alumnos de la preselección que surjan del Concurso Nacional se les entrenará intensivamente durante el primer semestre del año 2006. También, se les aplicarán exámenes para determinar a los que representarán a México en las olimpiadas internacionales.

La participación en las tres etapas mencionadas es **individual**.

Resumen de Resultados

En el año de 1987 la Sociedad Matemática Mexicana organizó la Primera Olimpiada Mexicana de Matemáticas. A partir de esa fecha, los concursos nacionales se han celebrado anualmente en las ciudades de Xalapa, Hermosillo, Metepec, Guanajuato, Oaxtepec, La Trinidad, Acapulco, Guadalajara, Colima, Mérida, Monterrey, Querétaro, Oaxaca, Morelia, Oaxtepec, Colima, Guanajuato e Ixtapan de la Sal.

Resultados de México en las Olimpiadas Internacionales

Los resultados de las Delegaciones Mexicanas en las Olimpiadas Internacionales, Iberoamericanas y Centroamericanas han sido los siguientes:

Olimpiada Internacional de Matemáticas

año	*país sede*	*no. de países*	*lugar de México*
1988	Australia	49	37
1989	Rep. Fed. de Alemania	50	31
1990	Rep. Popular de China	54	36
1991	Suecia	55	35
1992	Rusia	56	49
1993	Turquía	73	63
1994	Hong Kong	69	65
1995	Canadá	74	59
1996	India	75	53
1997	Argentina	82	32
1998	Taiwán	75	44
1999	Rumania	81	52
2000	Corea	82	30
2001	Estados Unidos	83	46
2002	Escocia	84	46
2003	Japón	82	41
2004	Grecia	84	37

La 45^{a} Olimpiada Internacional de Matemáticas se llevó a cabo en Atenas, Grecia, del 4 al 18 de julio de 2004. La delegación que representó a México estuvo integrada por los alumnos: Marco Antonio Figueroa Ibarra (Sonora), Héctor Daniel García Lara (Chihuahua), Rosemberg Toalá Enríquez (Chiapas), Gonzálo Arturo Montalván Gámez (Puebla), Carlos Vargas Obieta (Jalisco), Cristos Alberto Ruiz Toscano (Jalisco). Se obtuvieron 3 medallas de bronce (Marco Antonio, Héctor Daniel y Carlos) y una mención honorífica (Cristos Alberto). México ocupó el lugar 37 de 84 países participantes.

Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

año	*país sede*	*no. de países*	*lugar de México*
1989	Cuba	13	3
1990	España	15	3
1991	Argentina	16	5
1992	Venezuela	16	6
1993	México	16	9
1994	Brasil	16	6
1995	Chile	18	9
1996	Costa Rica	17	2
1997	México	17	3
1998	República Dominicana	18	5
1999	Cuba	20	3
2000	Venezuela	21	2
2001	Uruguay	21	3
2002	El Salvador	22	3
2003	Argentina	19	4
2004	España	22	5

La XIX Olimpiada Iberoamericana se llevó a cabo en Valencia, España, del 19 al 25 de septiembre de 2004. Los alumnos que concursaron fueron: Marco Antonio Figueroa Ibarra (Sonora), Héctor Daniel García Lara (Chihuahua), Gonzálo Arturo Montalván Gámez (Puebla), Cristos Alberto Ruiz Toscano (Jalisco). Se obtuvieron, una medalla de oro (Marco Antonio), dos de plata (Cristos Alberto y Héctor Daniel) y una de bronce (Gonzálo Arturo). México ocupó el quinto lugar de 22 países que participaron.

Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe

año	*país sede*	*no. de países*	*lugar de México*
1999	Costa Rica	10	2
2000	El Salvador	9	2
2001	Colombia	10	2
2002	México	8	1
2003	Costa Rica	11	1
2004	Nicaragua	12	1

Entre el 7 y el 11 de junio, se celebró en Managua, Nicaragua, la VI Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe. La delegación mexicana estuvo integrada por los alumnos: Isaac Buenrostro Morales (Jalisco), Pablo Soberón Bravo (Morelos) y David Guadalupe Torres Flores (Guanajuato). Los alumnos obtuvieron 3 medallas de oro y México ocupó la posición número uno de doce países participantes.

En total, en las olimpiadas internacionales se han obtenido tres medallas de plata, veinticuatro medallas de bronce y dieciocho menciones honoríficas. En las olimpiadas iberoamericanas se han obtenido once medallas de oro, veinticuatro medallas de plata, veintidós medallas de bronce y tres menciones honoríficas. En las olimpiadas centroamericanas se han obtenido diez medallas de oro, seis medallas de plata y dos de bronce.

Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico

Desde 1991, los ganadores del Concurso Nacional participan anualmente en la Olimpiada de Matemáticas de la Cuenca del Pacífico. No existe un registro estadístico sobre la participación de México.
El año pasado México participó también en esta olimpiada que se llevó a cabo en marzo. Esta olimpiada se realiza por correo y los exámenes son calificados por el país sede, el cual elabora también el exámen. En 2004 el país organizador fue Canadá. Marco Antonio Figueroa Ibarra (Sonora) obtuvo medalla de oro, Héctor Daniel García Lara (Chihuahua), Rosemberg Toála Enríquez (Chiapas) y Luis Alberto Martínez Chigo (Veracruz) obtuvieron medalla de bronce.

Resultados del Concurso Nacional de la 18a. Olimpiada Mexicana de Matemáticas

En noviembre de 2004 se llevó a cabo en Ixtapan de la Sal, Edo. de México, el Concurso Nacional de la 18^{o} Olimpiada Mexicana de Matemáticas, con la participación de todos los estados de la República. Los 16 alumnos ganadores del primer lugar fueron:

Iván Joshua Hernández Maynez (Coahuila)
Pablo Soberón Bravo (Morelos)
David Guadalupe Torres Flores (Guanajuato)
Gonzalo Arturo Montalván Gámez (Puebla)
Guevara Manuel Ángel Guevara López (Zacatecas)
Héctor Daniel García Lara (Chihuahua)
Juan Carlos Ramírez Prado (Baja California)
Diego Torres Patiño (Distrito Federal)
Francisco Javier Ibarra Goycoolea (Baja California)
Galo Higuera Rojo (Morelos)
Isaac Buenrostro Morales (Jalisco)
José Trinidad Barajas (Michoacán)
Mario Alejandro Huicochea Mason (Distrito Federal)
Mariana Gómez Schiavon (Morelos)
Jonathan Allan Chávez Casillas (Distrito Federal)
Rodrigo Díaz Martín (Jalisco).

Los 5 alumnos preseleccionados para la Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe fueron:

Isaac Buenrostro Morales (Jalisco)
Juan Carlos Ramírez Prado (Baja California)
Jorge Chavira Olivas (Chihuahua)
Jan Marte Contreras Ortiz (Jalisco)
Paul Iván Gallegos Bernal (Jalisco).

Aunque la participación en el Concurso Nacional es individual, es importante destacar la labor que han llevado a cabo los estados de la República apoyando a sus concursantes. Con el propósito de reconocer este trabajo, presentamos el registro de los estados que ocuparon los primeros 10 lugares en el 18° Concurso Nacional.

1. Morelos
2. Jalisco
3. Distrito Federal
4. Chihuahua
5. Baja California
6. Guanajuato
6. Yucatán
7. Nuevo León
7. Puebla
7. Sonora

Los números repetidos indican que esos estados obtuvieron la misma puntuación.

En esta ocasión, el premio a la Superación Académica se llamó "Árbol de la Vida"y fue ganado por el Zacatecas. El segundo y tercer lugar de este premio lo ocuparon, respectivamente, Aguascalientes y Guerrero.

Agradecimientos

Agradecemos a todos los estados que colaboraron con los problemas que aparecen en este folleto, así como a todas las personas que participaron en la elaboración del mismo. También quisiéramos agradecer a Teresa Valerio por la última lectura.

Información sobre la Olimpiada

Para obtener más información sobre los eventos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas o para consultar más material de estudio, visita nuestro sitio de Internet:

http://erdos.fciencias.unam.mx/omm

COMITÉ ORGANIZADOR DE LA
OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS

Febrero de 2005

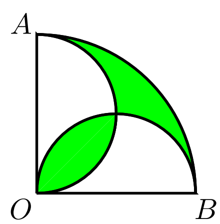
Enunciados de los Problemas

Presentamos aquí algunos problemas para mostrar el tipo de matemáticas que se manejan en la fase estatal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Al final encontrarás las soluciones.

Problema 1. La suma de todos los enteros entre 50 y 350, los cuales terminan en 1, es:

(a) 5880 (b) 5208 (c) 4877 (d) 4566

Problema 2. El arco AB es un cuarto de una circunferencia de centro O y radio $10\ cm$. Los arcos OA y OB son semicircunferencias. ¿Cuál es el área de la región sombreada?



(a) $25\pi - 50$ (b) 50 (c) $50\pi - 75$ (d) 25π

Problema 3. Consideremos los números de 5 cifras formados por los dígitos 1 y 2. ¿En cuántos de ellos el 1 aparece más veces que el 2?

(a) 20 (b) 16 (c) 32 (d) 18

Problema 4. ¿Cuántos de los siguientes 60 números:

$$84, 2 \cdot 84, 3 \cdot 84, \ldots, 58 \cdot 84, 59 \cdot 84, 60 \cdot 84$$

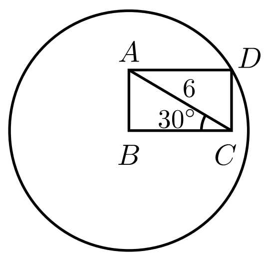
son múltiplos de 60?

(a) 18 (b) 30 (c) 15 (d) 12

Problema 5. Miré la hora un poco después de las 6 AM y las agujas formaban un ángulo de $110°$. Volví a mirarla antes de las 7 AM y nuevamente se formaba un ángulo de $110°$. ¿Cuántos minutos habían pasado?

(a) 40 (b) 30 (c) 60 (d) 45

Problema 6. En la figura, el rectángulo $ABCD$ está en el interior de la circunferencia de tal manera que el vértice B es el centro de la circunferencia. Si $AC = 6$ y $\angle ACB = 30°$, ¿cuánto mide su diámetro?



(a) 6 (b) 8 (c) 10 (d) 12

Problema 7. Pablo eligió tres dígitos distintos y escribió todos los números de 3 cifras que se forman con ellos (sin repeticiones). Después sumó todos los números que obtuvo. Encuentra la suma de Pablo, sabiendo que la suma de los dígitos originales es 14.

(a) 4662 (b) 4800 (c) 3108 (d) 3200

Problema 8. Un triángulo rectángulo de catetos 12 y 16 está inscrito en una circunferencia. ¿Cuál es el radio de dicha circunferencia?

(a) 6 (b) 8 (c) 10 (d) 14

Problema 9. En un número de tres cifras, la suma de las mismas es 18. La cifra de las unidades es el doble de la de las decenas. Por último, la diferencia que se obtiene restando el número dado y el formado al invertir el orden de sus cifras es 297. ¿Cuál es el número inicial?

(a) 684 (b) 648 (c) 936 (d) 963

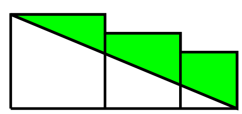
Problema 10. En una caja se tienen 20 pares de zapatos completos de tres colores distintos y de tres tamaños distintos. Si en la caja hay: 4 pares rojos, 1 chico, 1 mediano y 2 grandes; 7 pares verdes, 2 chicos, 2 medianos y 3 grandes; 9 pares azules, 2 chicos, 3 medianos y 4 grandes, ¿cuál es la cantidad mínima de zapatos que debes sacar para estar seguro de que sacaste un par completo del mismo color y tamaño?

(a) 4 (b) 16 (c) 20 (d) 21

Problema 11. ¿Por cuál número se debe sustituir la letra "a" para que el número $9758236642a2$ sea divisible entre 4?

(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 8

Problema 12. Tres cuadrados con lados de longitudes: 10 cm, 8 cm y 6 cm, respectivamente, se colocan uno al lado del otro como se muestra en la siguiente figura.



¿Cuál es el área de la parte sombreada?

(a) 100 cm^2 (b) 90 cm^2 (c) 120 cm^2 (d) 80 cm^2

Problema 13. Juan ha decidido repartir 35 canicas entre sus primos. Si nadie puede tener la misma cantidad de canicas, ¿cuál es la máxima cantidad de primos a los que les puede repartir sus canicas?

(a) 6 (b) 7 (c) 8 (d) 9

Problema 14. ¿Cuál es la suma de los dígitos del número $5^{2004} \times 2^{2000}$?

(a) 13 (b) 14 (c) 15 (d) 2004

Problema 15. ¿Cuántos números hay entre 100 y 300 (sin contar el 100 y el 300) que no sean divisibles entre 3 ni entre 5?

(a) 106 (b) 107 (c) 108 (d) 140

Problema 16. ¿Cuánto es $7^7 + 7^7 + 7^7 + 7^7 + 7^7 + 7^7 + 7^7$?

(a) 49^7 (b) 7^7 (c) 7^{49} (d) 7^8

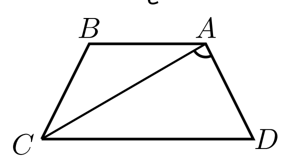
Problema 17. ¿Cuánto es la mitad de 4^{2004}?

(a) 2^{2004} (b) 4^{2003} (c) 4^{1002} (d) 2^{4007}

Problema 18. Juanito tiene un cupón del $20\,\%$ de descuento sobre el total a pagar de su compra en la tienda de la Olimpiada. Decidió ir a comprar una taza. Al llegar a la tienda se encontró con que la taza tenía un $30\,\%$ de descuento. ¿Cuál es el descuento total que obtendrá Juanito si utiliza el cupón?

(a) $44\,\%$ (b) $50\,\%$ (c) $60\,\%$ (d) $66\,\%$

Problema 19. El trapecio isósceles $ABCD$ es tal que $AD = AB = BC = 1$ y $DC = 2$, donde AB es paralelo a DC. ¿Cuánto mide el ángulo CAD?



(a) $45°$ (b) $60°$ (c) $90°$ (d) $120°$

Problema 20. La mamá de Miguel, Julio y Toño, les reparte 5 paletas, ¿de cuántas formas se las puede repartir? (Puede ser que a alguno no le toque paleta.)

(a) 12 (b) 15 (c) 21 (d) 30

Problema 21. Javier quiere sacar un par de calcetines de un cajón, en el que hay 100 calcetines blancos, 50 verdes y 25 rojos. ¿Cuántos calcetines debe sacar (sin ver) para asegurar que tendrá un par del mismo color?

(a) 174 (b) 50 (c) 25 (d) 4

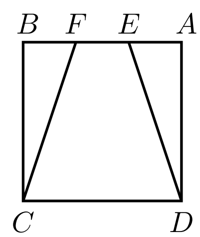
Problema 22. ¿Cuál de los siguientes valores de n, cumple que $n^2 + n + 41$, es un número entero que no es primo?

(a) 15 (b) 26 (c) 37 (d) 40

Problema 23. ¿Cuántos triángulos rectángulos de lados enteros existen tales que uno de sus catetos mide 2003?

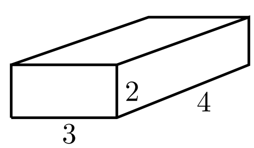
(a) ninguno (b) 1 (c) 2003 (d) una infinidad

Problema 24. Sea $ABCD$ un cuadrado. Sean E y F puntos sobre el lado AB tales que $AE = EF = FB$. ¿Qué fracción del cuadrado delimita el trapecio $FEDC$?



(a) $\frac{2}{5}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{3}{4}$

Problema 25. En un vértice de una caja de tamaño $2 \times 3 \times 4$ se encuentra una araña que quiere ir al vértice opuesto caminando sobre las caras de la caja. ¿Cuál es la distancia mínima que debe recorrer?



(a) $\sqrt{41}$ (b) 7 (c) $4 + \sqrt{13}$ (d) $5 + 2\sqrt{5}$

Problema 26. A una pareja se le aplica la operación ecualizadora que transforma la pareja (a, b) en la pareja $\left(\frac{3a+b}{4}, \frac{a+3b}{4}\right)$. Si comenzamos con la pareja $(2048, 1024)$, ¿cuál de las siguientes parejas no se podrá obtener después de aplicar varias veces la operación?

(a) $(1664, 1408)$ (b) $(1540, 1532)$ (c) $(1539, 1531)$ (d) $(1792, 1280)$

Problema 27. Se tienen cuadrados de 1×1, 2×2 y 3×3. ¿Cuál es la menor cantidad de cuadrados que se deben usar para completar un cuadrado, usando al menos uno de cada uno?

(a) 6 (b) 7 (c) 8 (d) 9

Problema 28. En la siguiente figura las áreas de los recuadros son 21, 15, 14 y X. ¿Cuál es el área total de la figura?

21	15
14	X

(a) 14.5 (b) 36 (c) 60 (d) 75

Problema 29. Cuando a un barril le falta el 30 % para llenarse contiene 30 litros más que cuando está lleno hasta el 30 %. ¿Cuántos litros le caben al barril?

(a) 60 (b) 75 (c) 90 (d) 100

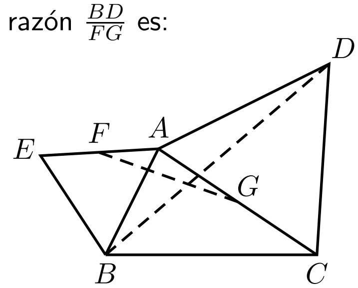
Problema 30. Si los ángulos α, β y γ de un triángulo cumplen que $\gamma = \alpha - \beta$, entonces el triángulo es:

(a) Acutángulo (b) Rectángulo (c) Obtusángulo (d) Isósceles

Problema 31. ¿Cuántos resultados diferentes podemos obtener sumando dos números distintos del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$?

(a) 11 (b) 15 (c) 17 (d) 18

Problema 32. En la siguiente figura ABC es un triángulo cualquiera y ACD y AEB son triángulos equiláteros. Si F y G son los puntos medios de EA y AC, respectivamente, la razón $\frac{BD}{FG}$ es:



(a) $\frac{1}{2}$ (b) 1 (c) $\frac{3}{2}$ (d) 2

Problema 33. ¿De cuántas formas se puede escribir $\frac{1}{14}$ en la forma $\frac{a}{7} + \frac{b}{2}$ con a y b enteros?

(a) Más de 3 (b) 1 (c) 2 (d) 3

Problema 34. ¿Cuántos enteros n tienen la siguiente propiedad: entre los divisores positivos de n, distintos de 1 y n, el mayor es 15 veces el más pequeño?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) Una infinidad

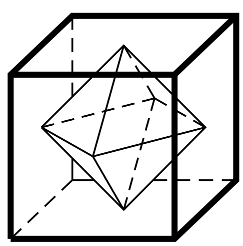
Problema 35. ¿Para cuántos enteros n entre 1 y 100 se puede factorizar $x^2 + x - n$ como el producto de dos factores lineales con coeficientes enteros?

(a) 0 (b) 2 (c) 9 (d) 10

Problema 36. ¿Para cuántos enteros positivos n se cumple que $n - 17$ divide a $n + 4$?

(a) 0 (b) 15 (c) 4 (d) 7

Problema 37. Un octaedro regular se forma uniendo los centros de las caras adyacentes de un cubo. La razón del volumen del octaedro al volumen del cubo es:

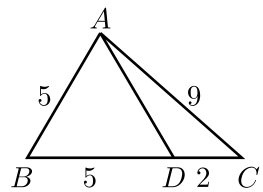


(a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{12}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{\sqrt{2}}{8}$

Problema 38. Consideremos la siguiente sucesión definida por $u_1 = a$ (con a un número positivo), y $u_{n+1} = -1/(u_n + 1)$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$. ¿Para cuál de los siguientes valores de n debe cumplirse que $u_n = a$?

(a) 15 (b) 16 (c) 17 (d) 18

Problema 39. En un triángulo ABC, tenemos que $AB = 5$, $BC = 7$, $AC = 9$ y D es un punto sobre el segmento AC con $BD = 5$. Encuentra la razón $AD : DC$.

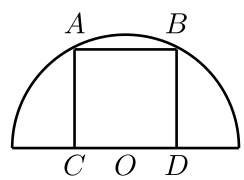


(a) 19:8 (b) 4:3 (c) 11:6 (d) 13:5

Problema 40. Un niño tiene un conjunto de 96 ladrillos. Cada ladrillo es de uno de dos materiales (plástico, madera), 3 tamaños (chico, mediano, grande), 4 colores (azul, verde, rojo, amarillo), y 4 formas (círculo, hexágono, cuadrado, triángulo). ¿Cuántos bloques en el conjunto son distintos del ladrillo *plástico mediano rojo círculo* en exactamente dos maneras? (El ladrillo *madera mediano rojo cuadrado* es uno de tales ladrillos.)

(a) 29 (b) 39 (c) 48 (d) 56

Problema 41. ¿Cuánto mide el área de un cuadrado inscrito en una semicircunferencia de radio 1?



(a) 1 (b) $\frac{4}{5}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{1}{2}$

Problema 42. Un punto *retícula* en el plano es un punto con coordenadas enteras. ¿Cuántos puntos *retícula* hay en el segmento cuyos extremos son $(3, 17)$ y $(48, 281)$? (Incluidos ambos puntos extremos.)

(a) 2 (b) 4 (c) 6 (d) 16

Problema 43. ¿Cuántas personas hubo en una fiesta que se sabe que se saludaron de mano todos los asistentes y que hubo 190 apretones de mano?

(a) 17 (b) 18 (c) 19 (d) 20

Problema 44. Un niño quiere subir una escalera; lo puede hacer subiendo uno o dos escalones a la vez. Si la escalera tiene 10 escalones en total, ¿de cuántas formas distintas puede subir las escaleras?

(a) 10 (b) 20 (c) 55 (d) 89

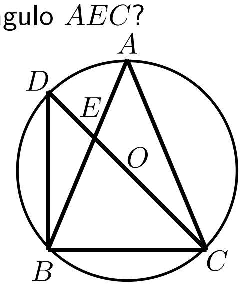
Problema 45. Un señor quiere repartir entre sus 3 hijos 15 monedas, pero el desea que cada uno de ellos reciba al menos una moneda. ¿De cuántas formas distintas puede repartirles las monedas?

(a) 455 (b) 105 (c) 91 (d) 220

Problema 46. Se tienen menos de 200 canicas. Si se reparten entre 3, sobra una; si se reparten entre 7, sobran 2 y; si se repartieran entre 5 no sobraría ninguna. ¿Cuántas canicas hay?

(a) 100 (b) 115 (c) 125 (d) 130

Problema 47. Los triángulos ABC y BCD son isósceles y el ángulo BAC mide 30^o. ¿Cuánto mide el ángulo AEC?



(a) 95 (b) 100 (c) 105 (d) 110

Problema 48. Un comandante dispone su tropa formando un cuadrado y ve que le quedan 36 hombres por acomodar. Decide poner una fila y una columna más de hombres en dos lados consecutivos del cuadrado y se da cuenta que le faltan 75 hombres para completar el cuadrado. ¿Cuántos hombres hay en la tropa?

(a) 3061 (b) 55 (c) 3025 (d) 2004

Problema 49. ¿Cuál es la suma de los 4 divisores primos de $2^{16} - 1$?

(a) 282 (b) 284 (c) 286 (d) 288

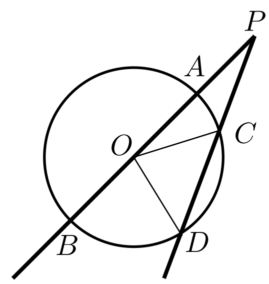
Problema 50. Un número capicúa es el que se lee igual de derecha a izquierda que de izquierda a derecha, por ejemplo, el número 1324231. ¿Cuántos números capicúas menores que cien mil existen?

(a) 10098 (b) 9999 (c) 1098 (d) 999

Problema 51. ¿Cuántos enteros del 1 al 2004 (inclusive) al elevarlos a la vigésima potencia, el resultado es un número terminado en 1?(En otras palabras, ¿para cuántos n la cifra de las unidades de n^{20} es 1?)

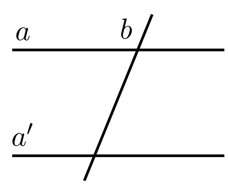
(a) 805 (b) 802 (c) 800 (d) 804

Problema 52. En la figura, AB es un diámetro y PC es igual al radio OD, la razón $\frac{\angle BPD}{\angle BOD}$ de las medidas de los ángulos BPD y BOD es:



(a) $\dfrac{1}{4}$ (b) $\dfrac{1}{3}$ (c) $\dfrac{1}{2}$ (d) $\dfrac{2}{3}$

Problema 53. En la figura, a y a' son rectas paralelas y b es una tranversal a ellas. ¿Cuántos puntos hay que estén a la misma distancia de las tres rectas?



(a) 0 (b) 2 (c) 4 (d) 6

Problema 54. En un triángulo rectángulo de hipotenusa 8 cm y área 9 cm^2, ¿cuál es su perímetro?

(a) 18 (b) 16 (c) 17 (d) 12

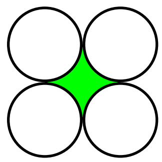
Problema 55. ¿Cuánto es $a+b$?, si sabemos que $7a+3b=12$ y $3a+7b=8$.

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

Problema 56. Si $\frac{x-3\sqrt{2004}}{3-y\sqrt{2004}}$, x, y y son números racionales, ¿cuánto vale xy?

(a) 4 (b) 6 (c) 9 (d) 18

Problema 57. Dados cuatro círculos de radio 1 y centros en los vértices de un cuadrado, ¿cuál de los siguientes números aproxima mejor el área sombreada de la figura?

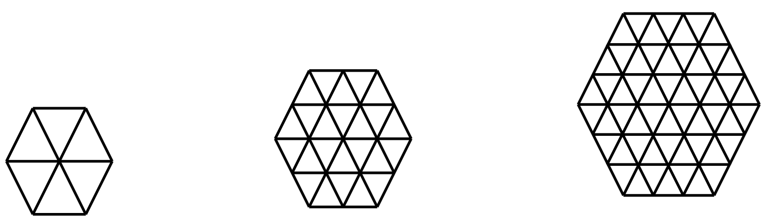


(a) 0.82 (b) 0.84 (c) 0.86 (d) 0.88

Problema 58. ¿Cuántas parejas de enteros positivos (x,y) hay que cumplan $x^2-y^2=13$?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) muchas

Problema 59. Siguiendo el patrón de las tres primeras figuras,



¿cuántos triángulos pequeños aparecerán en la novena figura?

(a) 216 (b) 486 (c) 540 (d) 600

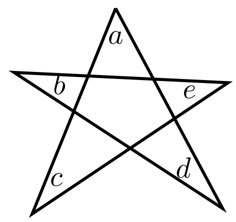
Problema 60. ¿Cuál de los siguientes números divide a la raíz cuadrada de 2004^{2004}?

(a) 167^{1670} (b) 3^{1003} (c) 2^{2002} (d) 4^{1003}

Problema 61. Un rectángulo mide 9 cm de un lado y tiene 45 cm^2 de área, ¿cuál es su perímetro?

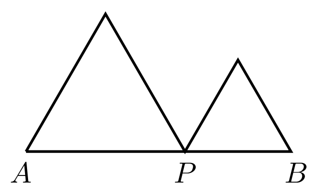
(a) 14 (b) 19 (c) 23 (d) 28

Problema 62. En la siguiente figura, ¿cuánto vale la suma de los ángulos a, b, c, d y e?



(a) $270°$ (b) $240°$ (c) $180°$ (d) no se puede saber

Problema 63. Se tiene un segmento AB de longitud 10 y un punto P en él tal que $\frac{AP}{PB} = \frac{3}{2}$. Se construyen sobre el mismo lado del segmento, un triángulo equilátero de lado AP y otro de lado PB. ¿Cuál es la distancia entre los vértices, de los triángulos equiláteros, que están fuera del segmento AB?



(a) $2\sqrt{5}$ (b) $2\sqrt{6}$ (c) $2\sqrt{7}$ (d) $2\sqrt{8}$

Problema 64. Hay un número que tiene 2005 dígitos y tiene el siguiente patrón: 18263171826317182631718263171826317... Los últimos tres dígitos de este número son:

(a) 1, 7 y 1 (b) 7, 1 y 8 (c) 1, 8 y 2 (d) 2, 6 y 3

Problema 65. Sean a y b números reales distintos tales que $2a^2 + 2b^2 = 5ab$. ¿Cuántos son los posibles valores de $\frac{(a+b)}{(a-b)}$?

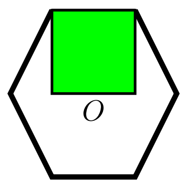
(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

Problema 66. ¿Cuántas ternas x, y, z de números reales satisfacen el sistema

$$\begin{aligned} x(x+y+z) &= 26 \\ y(x+y+z) &= 27 \\ z(x+y+z) &= 28? \end{aligned}$$

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) ninguna

Problema 67. En el siguiente hexágono regular, el punto O es su centro. ¿Cuál es la razón de las áreas del hexágono y de la región sombreada?



(a) 1 (b) $\frac{4}{5}$ (c) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (d) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Problema 68. Hallar la suma de todos los números que son permutaciones de los dígitos $1, 2, 3, 4,$ y 5. Esto es $12345 + 12354 + \ldots + 54321$.

(a) 3999999 (b) 5^{15} (c) 4000000 (d) 3999960

Problema 69. ¿Cuál es el último dígito de 3^{2005}?

(a)3 (b)9 (c)7 (d)1

Problema 70. Si $a + b = 1$ y $a^2 + b^2 = 2$, entonces $a^3 + b^3$ es igual a

(a) 4 (b) $\frac{5}{2}$ (c) 3 (d) $\frac{7}{2}$

Problema 71. El volumen de cierto paralelepípedo rectangular es 8, el área de la superficie es 32. Si sabemos que sus dimensiones están en progresión geométrica, ¿cuál es la suma de las longitudes de todas las aristas del paralelepípedo?

(a) 28 (b) 32 (c) 36 (d) 40

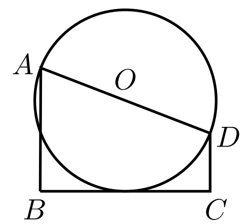
Problema 72. ¿Cuántos pares (m, n) de enteros satisfacen la ecuación $m + n = mn$?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) más de 3

Problema 73. ¿Cuántos soluciones en enteros tiene la ecuación $2 \cdot 2^{2x} = 4^x + 64$?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

Problema 74. En la figura, $AB \perp BC, BC \perp CD$ y BC es tangente a el círculo con centro en O y diámetro AD. ¿En cuál de los siguientes casos el área de $ABCD$ es un entero?



(a) $AB = 3$, $CD = 1$ (b) $AB = 5$, $CD = 2$ (c) $AB = 7$, $CD = 3$ (d) $AB = 9$, $CD = 4$

Problema 75. Un estudiante intentó calcular el promedio A, de x, y y z, primero calculó el promedio de x y y, después calculó el promedio de este resultado y z. Si $x < y < z$, el resultado final del estudiante es

(a) correcto (b) siempre menor que A (c) siempre mayor que A (d) a veces correcto y a veces incorrecto

Problema 76. ¿Para cuántos enteros x un triángulo cuyas medidas de los lados son 10, 14 y x tiene todos sus ángulos agudos?

(a) 4 (b) 5 (c) 7 (d) más de 7

Problema 77. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo, supongamos que los lados AB, BC, CD, DA, miden 3, 4, 12 y 13, respectivamente; además $\angle CBA$ es recto. El área de $ABCD$ es

(a) 32 (b) 36 (c) 42 (d) 72

Problema 78. Seis bolsas de canicas contienen 18, 19, 21, 23, 25 y 34 canicas, respectivamente. Cinco de las bolsas contienen canicas azules y la otra tiene canicas rojas. Juan toma tres de las bolsas y Jorge toma dos bolsas de las otras. Sólo se quedo la bolsa con canicas rojas. Si Juan obtuvo el doble de canicas que Jorge, ¿cuántas canicas rojas hay?

(a) 19 (b) 21 (c) 23 (d) 34

Problema 79. Se lanzan tres dados. ¿Cuál es la probabilidad de que los tres números de las caras hacia arriba formen una progresión aritmética con diferencia común mayor que cero?

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{6}$ (c) $\frac{1}{9}$ (d) $\frac{7}{36}$

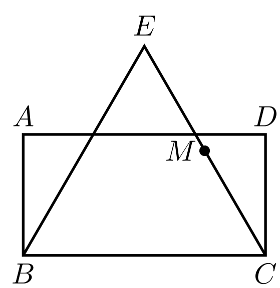
Problema 80. La suma de los dígitos en base diez de $(10^{4n^2+8}+1)^2$, donde n es un entero positivo es

(a) 4 (b) $4n^2$ (c) $2+2n$ (d) n^2+2n+2

Problema 81. Las medidas de los ángulos interiores de un polígono convexo están en progresión aritmética. Si el ángulo menor mide $100°$ grados y el ángulo mayor mide $140°$, entonces el número de lados del polígono es

(a) 6 (b) 8 (c) 10 (d) 11

Problema 82. Sea $ABCD$ un rectángulo con $BC = 2AB$ y sea BCE un triángulo equilátero. Si M es el punto medio de CE, ¿cuánto mide el ángulo CMD?

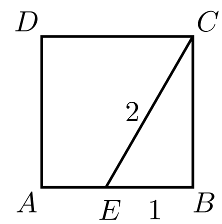


(a) $60°$ (b) $75°$ (c) $80°$ (d) $87°$

Problema 83. ¿Cuántos enteros positivos menores que 2004 existen tales que si su último dígito es borrado el entero es divisible por el nuevo número?

(a) 130 (b) 223 (c) 112 (d) 213

Problema 84. Sea E un punto en el lado AB del cuadrado $ABCD$. Si $EB = 1$ y $EC = 2$, entonces la razón entre el área del cuadrilátero $AECD$ y el triángulo EBC es



(a) $\sqrt{3}$ (b) $\sqrt{3}-1$ (c) $2\sqrt{3}-1$ (d) $2(\sqrt{3}-1)$

Problema 85. Se tiene un sucesión de 77 números enteros para la cual la suma de cualesquiera siete términos consecutivos es no negativa y la suma de cualesquiera once términos es no positiva. ¿Cuáles son los valores de la menor y de la mayor suma posible de todos los términos de la sucesión?

(a) -11 y 7 (b) -77 y 77 (c) 0 (d) -7 y 11

Problema 86. En el Colegio Tinguindín hay tres grupos de sexto grado. El promedio de las calificaciones en el grupo A es de 87, en el grupo B es de 73, en el grupo C es de 91. Se sabe que el promedio de los grupos A y B juntos es de 79, el de los grupos B y C es de 83. Encuentra el promedio de calificaciones del sexto grado.

(a) 84 (b) $83.66\ldots$ (c) 83 (d) no hay suficientes datos

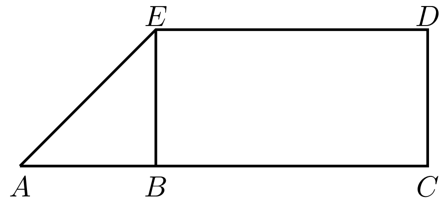
Problema 87. ¿Cuántas ternas ordenadas (a, b, c) de números reales tienen la propiedad de que cada número es el producto de los otros 2?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 5

Problema 88. Si $x = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots}}}$ y $y = \sqrt{6-\sqrt{6-\sqrt{6-\ldots}}}$, entonces el valor de $x-y$ es

(a) infinito (b) 1 (c) 0 (d) no puede calcularse

Problema 89. En la figura $BC = 2AB$; el triángulo ABE es un triángulo isósceles de 72 cm^2 de área y $BCDE$ es un rectángulo. Calcula el área del cuadrilátero $ABDE$.

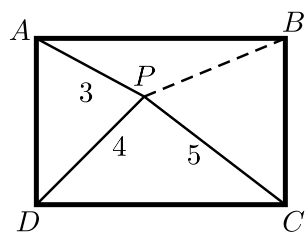


(a) 314 (b) 225 (c) 216 (d) 123

Problema 90. En el pequeño pueblo de Abace, se utilizan 2 bases de numeración. Un aldeano dijo: "26 personas usan mi base, base 10, y sólo 22 personas usan la base 14". Otro dijo "De los 25 aldeanos 13 usan ambas bases y 1 no sabe escribir todavía". ¿Cuántos habitantes hay en el pueblo (en base decimal)?

(a) 15 (b) 25 (c) 27 (d) 35

Problema 91. Sea P un punto en el interior del rectángulo $ABCD$. Si $PA = 3$, $PC = 5$ y $PD = 4$, el valor de PB es



(a) $3\sqrt{2}$ (b) $\sqrt{32}$ (c) $\dfrac{15}{4}$ (d) no se puede saber

Problema 92. ¿Cuál es el tamaño del mayor subconjunto, S, de $\{1, 2, 3, \ldots, 50\}$ tal que no existe un par de elementos de S cuya suma sea divisible por 7?

(a) 7 (b) 14 (c) 22 (d) 23

Problema 93. Sean $a_1, a_2 ...$ y $b_1, b_2 ...$ progresiones aritméticas tales que $a_1 = 25$, $b_1 = 75$ y $a_{100} + b_{100} = 100$. Encuentra la suma de los primeros 100 términos.

(a) 0 (b) 100 (c) 10,000
(d) no hay suficiente información

Problema 94. Los puntos A y B estan a 5 unidades de distancia. ¿Cuántas líneas en un plano dado, las cuales contienen a A y B, están a 2 unidades de A y a 3 unidades de B?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) más de 3

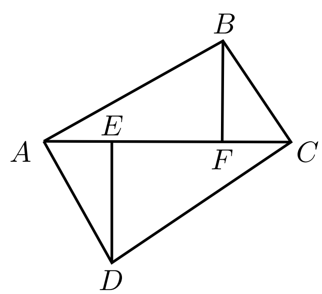
Problema 95. Cada arista de un cubo es coloreada roja o negra. Cada cara del cubo tiene al menos un arista negra. La menor cantidad de aristas negras que puede haber es

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5

Problema 96. ¿Cuántos enteros positivos menores que 50 tienen un número par de divisores positivos?

(a) 5 (b) 7 (c) 9 (d) 11

Problema 97. En la figura, $ABCD$ es un cuadrilátero con ángulos rectos en A y en C. Los puntos E y F están en AC. DE y BF son perpendiculares a AC. Si $AE = 3$, $DE = 5$ y $CE = 7$, entonces BF es igual a



(a) 3.6 (b) 4 (c) 4.2 (d) 5

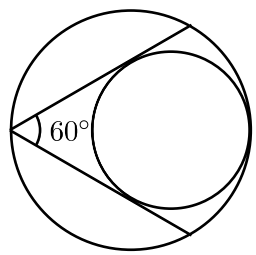
Problema 98. Decimos que un número es *cuadradísimo* si satisface las siguientes condiciones:
(i) todos sus dígitos son cuadrados;
(ii) es un cuadrado perfecto;
(iii) si separamos el número en parejas de dígitos de derecha a izquierda, estas parejas son cuadrados perfectos si los consideramos como números de 2 dígitos.
¿Cuántos números menores que 2005 son *cuadradísimos*?

(a) 5 (b) 7 (c) 8 (d) 15

Problema 99. El punto P está a 9 unidades de distancia del centro de un círculo de radio 15. ¿Cuántas cuerdas del círculo contienen a P y tienen medidas enteras?

(a) 11 (b) 12 (c) 15 (d) 29

Problema 100. Dentro de un círculo de radio uno se encuentra otro círculo que es tangente al primero y a un ángulo de 60° inscrito en el primero, cuya bisectriz es un diámetro. ¿Cuál es el radio de esta circunferencia?

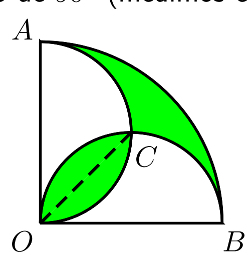


(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{4}{5}$ (d) $\frac{3}{2}$

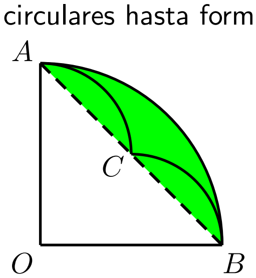
Soluciones de los problemas

Solución del problema 1. La respuesta es (a).
Los números que serán sumados forman una progresión aritmética cuyo primer término es $a = 51$, el último término es $l = 341$ y la diferencia común es 10. Sea n el número de términos que serán sumados, entonces $341 = 51 + (n-1)10$, de donde obtenemos que $n = 30$. Ahora, para calcular su suma S, usamos la conocida fórmula $S = \frac{1}{2}n(a+l)$. De aquí obtenemos finalmente que $S = 15 \cdot 392 = 5880$.

Solución del problema 2. La respuesta es (a).
Trazamos el segmento OC y obtenemos dos segmentos circulares, cada uno de ellos de radio 5 y con un arco de 90° (medimos el arco en grados).



Trasladamos esos segmentos circulares hasta formar la siguiente figura:



Tenemos ahora que el área del segmento circular de centro O, radio 10 y arco de $90°$, es equivalente al área sombreada original. Para calcularla, basta con restarle el área del triángulo OAB al área del sector circular OAB. Entonces, el área buscada es

$$\frac{1}{4}\pi(10)^2 - \frac{1}{2}10 \cdot 10 = 25\pi - 50.$$

Solución del problema 3. La respuesta es (b).
Dado que 5 es impar, cada número de los considerados, o tiene más dígitos iguales a 1 o tiene más dígitos iguales a 2. Del total de los números considerados, los que tienen más dígitos 1 que 2 son la mitad. Veamos cuántos números de 5 cifras se forman con los dígitos 1 y 2:
En cada posición tenemos dos posibilidades, 1 ó 2. Son 5 posiciones, por lo tanto hay $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$ números. La mitad de ellos es 16.

Solución del problema 4. La respuesta es (d).
Primero factorizamos 84 y 60:

$$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7;\ 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5.$$

El número $k \cdot 84$ es múltiplo de 60 cada vez que k es múltiplo de 5. Como el número de múltiplos de 5 entre 1 y 60 es $\frac{60}{5}$ tenemos que la respuesta es 12.

Solución del problema 5. La respuesta es (a).
El horario recorre $30°$ en una hora y el minutero recorre $360°$ en una hora. Queremos averiguar en cuánto tiempo el minutero recorre $110° + 110° + x = 220° + x$ y el horario recorre x. La razón entre la velocidad del horario y la velocidad del minutero es $1 : 12$, entonces tenemos que

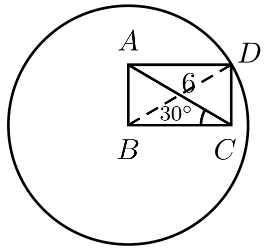
$$\frac{220 + x}{12} = \frac{x}{1}.$$

De aquí obtenemos la ecuación

$$220 + x = 12x,$$

la cual da como resultado $x = 20$, esto es, habían pasado 40 minutos.

Solución del problema 6. La respuesta es (d).
El segmento que va de B a D es un radio y como las diagonales en un rectángulo miden lo mismo, tenemos que el diámetro es 12.



Solución del problema 7. La respuesta es (c).
Sean a, b, c los dígitos que eligió Pablo. Con ellos formó 6 números distintos y luego los sumó. Cuando puso los números en columna para sumarlos, en las columna de cada cifra le quedaron la misma cantidad de a, de b y de c. Como son 6 números, le quedaron dos de cada uno. En la suma final obtuvo

$$2(a+b+c)\cdot 100 + 2(a+b+c)\cdot 10 + 2(a+b+c) = 2\cdot 14\cdot 111 = 3108.$$

Solución del problema 8. La respuesta es (c).
Como el triángulo es rectángulo sabemos que la hipotenusa del triángulo es el diámetro y mide 20, luego, el radio mide 10.

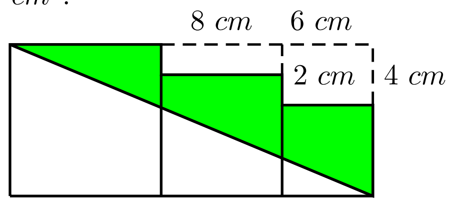
Solución del problema 9. La respuesta es (c).
Sea abc el número de tres cifras. Sabemos que $c = 2b$, $a > c$ y $a + b + c = 18$. $abc - bca = 297$, luego $a + 7 = 10 + c$ y $a = c + 3 = 2b + 3$. Tenemos que $2b+3+b+2b = 18$, esto es, $5b = 15$. Dado que $b = 3$, tenemos que el número inicial es 936.

Solución del problema 10. La respuesta es (d).
En 20 pares de zapatos hay 20 zapatos del pie derecho y 20 del pie izquierdo. Entonces, si sacamos cualquier número de zapatos menor o igual a 20 no podemos asegurar el haber completado un par. Por lo tanto, tenemos que sacar al menos 21 zapatos para estar seguros de haber completado un par.

Solución del problema 11. La respuesta es (b).
Para que un número sea divisible entre 4, el número formado por los dos últimos dígitos debe ser divisible entre 4. De las opciones dadas el único número que cumple es el 5.

Solución del problema 12. La respuesta es (d).
El área de la parte sombreada es igual al área de un triángulo rectángulo de

catetos 10 cm y 24 cm menos el área de dos rectángulos, uno de 2×8 y otro de 4×6. Tenemos entonces que el área de la parte sombreada es igual a $120 - (16 + 24) = 80\ cm^2$.



Solución del problema 13. La respuesta es (b).
Si le repartimos 1 al primer primo, 2 al segundo, y así sucesivamente, tenemos que podemos repartir

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 7 = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28 \quad \text{canicas}$$

y sobran 7 canicas que ya no se pueden repartir entre otros primos. Por lo tanto, si al primero le damos 2, al segundo 3 y así sucesivamente, tenemos que al séptimo primo le podemos dar 8 con lo que nos terminamos las canicas. Luego, se las podemos repartir a 7 primos.

Otra posibilidad, sería repartirle al primero 1, al segundo 2 y así sucesivamente. Entonces tendríamos que entre los seis primeros primos repartimos 1, 2, 3, 4, 5, 6 y al séptimo primo le tocarían las 14 canicas restantes. En ambos casos tenemos que son 7 primos.

Solución del problema 14. La respuesta es (a).
Podemos escribir

$$5^{2004} \times 2^{2000} = 5^4 \times 5^{2000} \times 2^{2000} = 5^4 \times (5 \times 2)^{2000} = 5^4 \times 10^{2000} = 625 \times 10^{2000},$$

es decir, el número es 625 seguido de 2000 ceros. Luego, la suma de los dígitos es 13.

Solución del problema 15. La respuesta es (b).
Veamos cuántos números entre 101 y 299 son múltiplos de 3 y 5. Múltiplos de 3 en cada centena hay 33, luego en total hay 66 múltiplos. Múltiplos de 5 en cada centena hay 20 pero como no estamos contando el 300 tenemos en total 39 múltiplos de 5 entre 101 y 299. Algunos de estos números son múltiplos de 3 y 5 a la vez, es decir, múltiplos de 15 y estos números, que son 13, los estamos contando dos veces. Luego, la cantidad total de números múltiplos de 3 ó 5 es

$66 + 39 - 13 = 92$. Por lo tanto, como el total de números entre 100 y 300 es 199 (sin contar el 100 y el 300), los números que no son múltiplos de 3 ni de 5 es $199 - 92 = 107$.

Solución del problema 16. La respuesta es (d).
Podemos escribir

$$7^7 + 7^7 + 7^7 + 7^7 + 7^7 + 7^7 + 7^7 = 7^7(1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) = 7^7 \times 7 = 7^8.$$

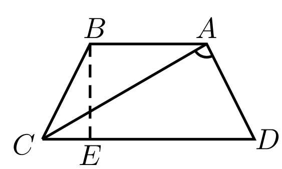
Solución del problema 17. La respuesta es (d).
Podemos escribir

$$4^{2004} = (2^2)^{2004} = (2)^{4008}.$$

Si dividimos $(2)^{4008}$ entre 2, tenemos $(2)^{4007}$.

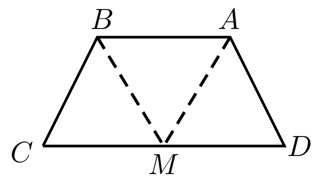
Solución del problema 18. La respuesta es (a).
Sea x el costo original de la taza. Como ésta tiene un $30\,\%$ de descuento, el costo de la taza quitando este $30\,\%$ es $x - 0.3x = 0.7x$. Sobre este costo tenemos que hacer un $20\,\%$ de descuento, es decir, el costo de la taza será $0.7x - 0.2(0.7x) = (0.7 - 0.14)x = 0.56x$. Esto quiere, decir que el costo real de la taza después de los dos descuentos es el $56\,\%$ de su valor original. Por lo tanto, el descuento es $44\,\%$.

Solución del problema 19. La respuesta es (c).
Desde B tracemos la perpendicular BE, con E en el segmento CD. Tenemos que $CE = 1/2$. Considerando el triángulo rectángulo BCE, tenemos que $\cos \angle BCE = 1/2$, luego $\angle BCE = 60°$.



Como el trapecio es isósceles, tenemos que $\angle ABC = 120°$. Además, sabemos que el triángulo ABC es isósceles, es decir, los ángulos BCA y CAB son iguales y miden $30°$. Por lo tanto, el $\angle CAD = 90°$.

Segunda solución: Sea M el punto medio del lado CD, entonces $DM = MC = 1$. Trazamos AM y BM. Observemos que $\angle DMA = \angle MAB$ por ser AB y DC paralelas. Ahora bien, los triángulos DMA y BAM son congruentes por el criterio LAL, ya que $DM = 1 = AB$ y AM es lado común. Entonces $AD = MB = 1$.



Análogamente, los triángulos CMB y ABM son congruentes y por lo tanto $BC = AM = 1$. Luego, $MC = MB = MA = MD$, es decir, M es el centro de la circunferencia que pasa por A, B, C y D. Esto es, DC es diámetro y por lo tanto, $\angle DAC = 90°$.

Solución del problema 20. La respuesta es (c).
Consideremos siete espacios de la manera siguiente: _ _ _ _ _ _ _. De estos siete espacios vamos a escoger 2 a los cuales les vamos a llamar "separadores" y los denotaremos con el símbolo $|$. La cantidad de espacios antes del primer separador son las paletas que le tocan a la primera persona, la cantidad de espacios entre el primer y segundo separador son las que le tocan a la segunda persona y los espacios después del segundo separador son las que le tocan a la tercera persona. Así por ejemplo, el resultado _ _ | _ _ _ |, significa que a la primera persona le tocan 2 paletas, a la segunda 3 y a la tercera ninguna. De igual manera, para cada repartición, tendremos un arreglo de 5 espacios y 2 "separadores". Tenemos que la cantidad de formas en que se pueden repartir las paletas es la misma que la cantidad de formas en que se pueden arreglar 5 espacios y 2 "separadores". El total de maneras distintas de escoger 2 "separadores" de entre 7 espacios, es igual a las combinaciones de 7 elementos tomados de 2 en 2, esto es, $\binom{7}{2} = \frac{7!}{5!2!} = 21$.

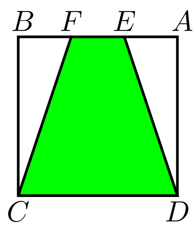
Solución del problema 21. La respuesta es (d).
Si Javier saca 4 calcetines, habrá por lo menos dos del mismo color y como en los calcetines no hay diferencia entre el pie derecho e izquierdo, con esto puede asegurar que tendrá un par del mismo color.

Solución del problema 22. La respuesta es (d).
Primero observemos que $n^2 + n$ es igual a $n(n + 1)$. Entonces, si n vale 40, $n + 1$ vale 41 y la ecuación nos queda $(40)(41) + 41$, que tiene el factor común 41. Esto significa que 41 divide a $n^2 + n + 41$ cuando n vale 40, por lo tanto no es primo.

Solución del problema 23. La respuesta es (b).
Si a y c son las longitudes de los lados del otro cateto y la hipotenusa, respectiva-

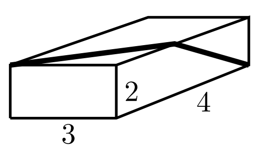
mente, entonces, como el otro cateto mide 2003, por el teorema de Pitágoras tenemos $a^2+2003^2=c^2$. Despejando nos queda $2003^2=c^2-a^2=(c+a)(c-a)$, por ser diferencia de cuadrados. Como 2003 es primo y como $c+a$ es mayor que $c-a$, entonces $c+a$ debe valer 2003^2 y $c-a$ debe valer 1. Esta es la única posibilidad y se puede verificar que cumple. Entonces, sólo existe un triángulo con tales propiedades.

Solución del problema 24. La respuesta es (c).
Calculamos el área que no cubre el trapecio, la cual consiste de los triángulos rectángulos AED y FBC, cuyas bases BF y EA miden un tercio del lado del cuadrado y sus alturas BC y AD son el lado del cuadrado.



Si el lado del cuadrado mide y, entonces el área de cada uno de estos triángulos es $\frac{1}{2}\frac{y}{3}y=\frac{y^2}{6}$ y el área de los dos es $\frac{y^2}{3}$, la cual es $\frac{1}{3}$ del área total y^2. Por lo tanto, el área del trapecio es $\frac{2}{3}$ del área del cuadrado.

Solución del problema 25. La respuesta es (a).
Para llegar al vértice opuesto, la araña tiene que caminar por tres aristas, por una cara y una arista, o por dos caras. Si camina por tres aristas, entonces pudo haberse ahorrado la distancia de dos aristas caminando por la cara correspondiente, porque sabemos que la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta. Si camina por una arista y una cara, "desdoblamos" la caja y vemos que su movimiento es "quebrado", es decir, habría sido más corto si en lugar de caminar por la cara y la arista hubiese caminado por las dos caras correspondientes en "línea recta"(ya que camina por dos caras desdobladas).



El problema se reduce entonces a caminar por la diagonal de un rectángulo. Los posibles rectángulos miden $(2+3)\times 4$; $(2+4)\times 3$; $(3+4)\times 2$. De todos estos rectángulos, al calcular la longitud de su diagonal utilizando el teorema de

Pitágoras, obtenemos las siguientes longitudes: $\sqrt{41}$, $\sqrt{45}$ y $\sqrt{53}$. La menor de éstas es $\sqrt{41}$.

Solución del problema 26. La respuesta es (c).
La suma de los números de la pareja (a, b) es $a + b$, y la suma de la pareja $\left(\frac{3a+b}{4}, \frac{a+3b}{4}\right)$ es $a + b$. Por lo tanto, la suma de los números en una pareja al aplicarle la operación ecualizadora no varía. Si comenzamos con la pareja $(2048, 1024)$ cuya suma de números es $2048 + 1024 = 3072$, entonces la pareja que nunca se podrá obtener es $(1539, 1531)$, ya que $1539 + 1531 = 3070$.

Solución del problema 27. La respuesta es (c).
Con uno de 3×3, tres de 2×2 y cuatro de 1×1 (ocho en total) se hace un cuadrado de 5×5. Debe de haber exactamente un cuadrado de 3×3, si hay dos tendría que haber por lo menos 9 cuadrados más. Debe de haber exactamente tres de 2×2 porque si hay más aumenta la dimensión y también el número de cuadrados usados.

Solución del problema 28. La respuesta es (c).
El rectángulo de área 21 es de 3×7, el de área 15 es de 3×5 y el de área 14 es de 2×7. Luego el rectángulo X es de 2×5.

	7	5
3	21	15
2	14	X

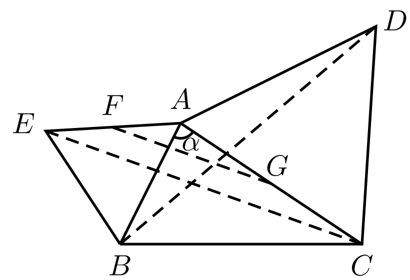
Por lo tanto, el área total es $21 + 15 + 14 + 10 = 60$.

Solución del problema 29. La respuesta es (b).
Sea x la capacidad del barril. Del enunciado del problema obtenemos las siguiente ecuación: $70\,\%x = 30\,\%x + 30$, la cual es equivalente a $0.7x = 0.3x + 30$. Resolviéndola obtenemos que $x = 75$ litros.

Solución del problema 30. La respuesta es (b).
Tenemos que $180° = \alpha + \beta + \gamma = \alpha + \beta + (\alpha - \beta) = 2\alpha$, es decir, $\alpha = 90°$.

Solución del problema 31. La respuesta es (c).
El número más grande que podemos obtener es 19 y el más chico es 3. Es fácil ver que se puede obtener cualquier número entre estos dos. Por lo tanto, podemos obtener 17 resultados distintos.

Solución del problema 32. La respuesta es (d).
Sea $\angle BAC = \alpha$. Como ACD y AEB son triángulos equiláteros, tenemos que $AD = AC$ y $AB = AE$, además, $\angle BAD = \angle EAC = \alpha + 60°$. Se sigue que los triángulos BAD y EAC son congruentes, por el criterio LAL. De aquí tenemos que $BD = EC$, además, como F y G son los puntos medios de EA y AC, tenemos que $FG = \frac{1}{2}EC$. Por lo tanto, $\frac{BD}{FG} = \frac{EC}{FG} = 2$.



Solución del problema 33. La respuesta es (a).
La igualdad $\frac{1}{14} = \frac{a}{7} + \frac{b}{2}$ es equivalente a la igualdad $2a + 7b = 1$. Es fácil ver que $a = -3 + 7k$ y $b = 1 - 2k$ son solución para cualquier entero k.

Solución del problema 34. La respuesta es (c).
Cuando quitamos a 1 y a n de los divisores positivos de n, tenemos que el mayor y el menor, multiplicados, deben dar n. Sea a el primer divisor positivo de n (distinto de 1). La condición del problema establece que $n = 15a^2$, pero entonces 3 divide a n, así que $a \leq 3$. Sólo tenemos dos soluciones, cuando $a = 2$ o $a = 3$.

Solución del problema 35. La respuesta es (c).
Como $-n < 0$, tenemos que

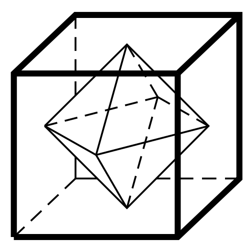
$$x^2 - x - n = (x - a)(x + b),$$

con a y b enteros positivos. Como el coeficiente de x es 1, entonces $b = a + 1$. Sabemos también que $n = ab$, entonces, el mayor valor que puede tener a es 9, ya que $n = 9 \cdot 10 = 90 < 100$. También, tenemos que $a < 10$, de otra forma, si $a \geq 10$ entonces $n \geq 110$. Por lo tanto, a puede tomar cualquier valor desde 1 hasta 9.

Solución del problema 36. La respuesta es (d).
Queremos que $\frac{n+4}{n-17}$ sea un número entero, para esto, reescribimos la expresión

como
$$\frac{n+4}{n-17} = \frac{n-17+17+4}{n-17} = 1 + \frac{21}{n-17}.$$
Para que esta fracción sea un número entero, basta que $n-17$ sea un divisor de 21. Los divisores de 21 son $\pm 1, \pm 3, \pm 7, \pm 21$. Igualando $n-17$ a cada uno de los divisores, obtenemos los valores de n que hacen que $\frac{21}{n-17}$ sea entero. Es fácil ver que todos los divisores, excepto $+21$, cumplen que n es un entero positivo.

Solución del problema 37. La respuesta es (a).
Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la longitud de la arista del cubo es 2. Entonces, el volumen del cubo es 8 y cada arista del octaedro es igual a $\sqrt{2}$. Bisectamos el octaedro en dos pirámides de bases cuadradas. Cada una de las pirámides tiene altura 1 y área de la base $(\sqrt{2})^2 = 2$, de tal manera que el volumen de cada pirámide es $(1/3)(2)(1) = (2/3)$. El volumen del octaedro es entonces $4/3$, por lo tanto, la razón requerida es $(4/3) : 8 = 1/6$.

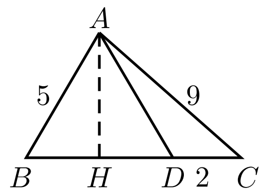


Solución del problema 38. La respuesta es (b).
Calculemos los primeros términos de la sucesión para encontrar un patrón:
$$\begin{aligned} u_1 &= a \\ u_2 &= \tfrac{-1}{a+1} \\ u_3 &= \tfrac{-1}{\frac{-1}{a+1}+1} = \tfrac{-(a+1)}{a} \\ u_4 &= \tfrac{-1}{-\frac{(a+1)}{a}+1} = \tfrac{-a}{-1} = a. \end{aligned}$$
De aquí obtenemos que $a = u_1 = u_4 = u_7 = \cdots = u_{16} = \cdots$. Entre las opciones dadas, solamente el número 16 aparece. Es fácil verificar que ninguno de los otros valores para n cumplen $u_n = a$ para toda a.

Solución del problema 39. La respuesta es (a).
Apliquemos la ley de Cosenos al triángulo BAC:
$$\begin{aligned} BC^2 &= BA^2 + AC^2 - 2 \cdot BA \cdot AC \cos A \\ 49 &= 25 + 81 - 2 \cdot 5 \cdot 9 \cos A. \end{aligned}$$

De aquí obtenemos $\cos A = 19/30$. Sea H el pie de la altura desde B, entonces

$$\begin{aligned} AD &= 2 \cdot AH = 2 \cdot AB \cdot cos\,A = \tfrac{19}{3}, \\ DC &= AC - AD = \tfrac{8}{3}, \\ AD : DC &= 19 : 8. \end{aligned}$$



Segunda solución: Aplicando el Teorema de Pitágoras a los triángulos AHB y CHB obtenemos:

$$5^2 - AH = BH^2 = 7^2 - (9 - AH)^2.$$

Resolviendo la ecuación encontramos que $AH = 19/6$ y entonces $AD = 19/3$. Ahora, como

$$AD : DC = AD : (9 - AD)$$

tenemos que

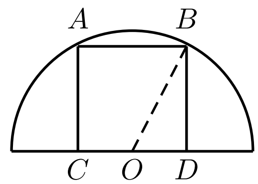
$$AD : DC = \frac{19}{3} : \frac{8}{3} = 19 : 8.$$

Solución del problema 40. La respuesta es (a).
Para que un ladrillo sea diferente del ladrillo dado, existe solamente una elección para material diferente, 2 elecciones para tamaño diferente, 3 elecciones para color diferente, y 3 elecciones para forma diferente. Existen $\binom{4}{2} = 6$ maneras en las cuales un ladrillo puede diferir del ladrillo dado en exactamente dos maneras:

(1) Material y tamaño: $1 \cdot 2 = 2$ ladrillos distintos.
(2) Material y color: $1 \cdot 3 = 3$ ladrillos distintos.
(3) Material y forma: $1 \cdot 3 = 3$ ladrillos distintos.
(4) Tamaño y color: $2 \cdot 3 = 6$ ladrillos distintos.
(5) Tamaño y forma: $2 \cdot 3 = 6$ ladrillos distintos.
(6) Color y forma: $3 \cdot 3 = 9$ ladrillos distintos.

Entonces, tenemos $2 + 3 + 3 + 6 + 6 + 9 = 29$ ladrillos los cuales difieren en exactamente dos formas distintas del ladrillo dado.

Solución del problema 41. La respuesta es (b).
El triángulo rectángulo OBD tiene por hipotenusa al radio OB, de aquí obtenemos que $BD^2 + OD^2 = 1$. Como $BD = 2OD$, entonces $BD^2 + (\frac{BD}{2})^2 = 1$ y el área del cuadrado es $BD^2 = \frac{4}{5}$.



Solución del problema 42. La respuesta es (b).
La pendiente del segmento es

$$\frac{281-17}{48-3}=\frac{264}{45}=\frac{88}{15},$$

entonces la ecuación de la línea que contiene al segmento es

$$y=17+\frac{88}{15}(x-3).$$

Tenemos que un punto *retícula* estará en el segmento si y sólo si:
a) x y y son enteros,
b) $3\leq x\leq 48$, y
c) $y=17+88(x-3)/15$.

Como 88 y 15 son primos relativos, tenemos que $x-3$ debe ser un múltiplo de 15; esto es, $x=3,18,33,\ldots$. Los cuatro puntos *retícula* son

$$(3,17),\ (18,105),\ (33,193),\ (48,281).$$

Solución del problema 43. La respuesta es (c).
Sea n el número de asistentes. Para que se dé lugar a un saludo necesitamos a 2 personas, entonces, el número de saludos distintos es igual a las combinaciones de n tomados de 2 en 2, esto es, $\binom{n}{2}=\frac{(n)(n-1)}{2}$. Dado que el número de saludos es igual a 190, obtenemos $\frac{(n)(n-1)}{2}=190$. De aquí obtenemos la ecuación $n^2-n-380=0$, la cual tiene como raíces a -20 y a 19. Por lo tanto, a la fiesta asistieron 19 personas.

Solución del problema 44. La respuesta es (d).
Para contar el número de formas distintas de subir los escalones, dividiremos el conteo en casos dependiendo del número de veces que subió dos escalones a la vez:

1) Solamente sube escalones de uno en uno. Aquí tenemos una posibilidad solamente.

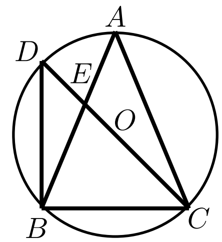
2) Solamente en una ocasión sube 2 escalones a la vez. El número de posibilidades aquí es equivalente a la cantidad de permutaciones distintas de un 2 y ocho 1's. Tenemos 9 opciones.
3) En dos ocasiones sube 2 escalones a la vez. El número de posibilidades aquí es equivalente a la cantidad de permutaciones distintas de dos 2's y seis 1's. Tenemos 28 opciones.
4) En tres ocasiones sube 2 escalones a la vez. El número de posibilidades aquí es equivalente a la cantidad de permutaciones distintas de tres 2's y cuatro 1's. Tenemos 35 opciones.
5) En cuatro ocasiones sube 2 escalones a la vez. El número de posibilidades aquí es equivalente a la cantidad de permutaciones distintas de cuatro 2's y dos 1's. Tenemos 15 opciones.
6) En cinco ocasiones sube 2 escalones a la vez. Aquí solamente tiene una posibilidad.
Por lo tanto, el niño puede subir los escalones de 89 formas distintas.

Solución del problema 45. La respuesta es (c).
Primero le damos una moneda a cada hijo para asegurar que cada uno reciba al menos una moneda. Ahora tenemos que repartir las 12 monedas restantes. Para contar de cuántas formas distintas podemos repartir estas 12 monedas utilizaremos nuevamente la técnica de los *separadores*, la cual se usó en la solución del problema 17:
En esta ocasión debemos considerar el número de arreglos de dos separadores (|) y 12 espacios (__), ya que como se vió en el problema 17, a cada arreglo de 2 separadores y 12 espacios le corresponde una repartición y viceversa. Tenemos que el total de arreglos distintos de 2 separadores y 12 espacios es igual a las combinaciones de 14 elementos tomados de 2 en 2, esto es, $\binom{14}{2} = \frac{14!}{12!2!} = 91$.

Solución del problema 46. La respuesta es (a).
Sea n el número de canicas. Por las condiciones del problema sabemos que n es de las formas $3k+1$, $7t+2$, $5r$, para algunos enteros k, t, r. Podemos reescribir estas formas como $3k_1 - 5$, $7t_1 - 5$, $5r_1 - 5$, para algunos enteros k_1, t_1, r_1. Con esto, tenemos que $n + 5$ es simultáneamente de las formas $3k_1$, $7t_1$, $5r_1$, es decir, es de la forma $3 \cdot 5 \cdot 7m = 105m$, para algún entero m. El menor valor para m es 1, por lo tanto $n + 5 = 105$, esto es, $n = 100$.

Solución del problema 47. La respuesta es (c).
Como el triángulo ABC es isósceles tenemos que $\angle BCA = 75°$. También, $\angle CDB = \angle CAB$, por ser ángulos inscritos e intersectar el mismo arco. Como el triángulo BCD es isósceles entonces $\angle BCD = \angle CDB = 30°$, con lo cual

tenemos que $\angle DCA = 75° - 30° = 45°$, por lo tanto, $\angle AEC = 180° - 30° - 45° = 105°$.



Solución del problema 48. La respuesta es (a).
Denotamos por x el lado del primer cuadrado. Al elevarlo al cuadrado y sumarle 36 obtenemos el número de hombres que hay en la tropa. A este nuevo número le asignaremos la letra $y = x^2+36$. Cuando le agregamos una fila y una columna el nuevo cuadrado se vuelve de lado $x + 1$, pero en este caso le hacen falta 75 hombres para completar el cuadrado. Entonces, $y = (x+1)^2 - 75$. De estas dos igualdades obtenemos la ecuación

$$x^2 + 36 = (x + 1)^2 - 75,$$

de la cual se sigue que

$$\begin{aligned} x^2 + 36 &= (x + 1)^2 - 75 \\ x^2 + 36 &= x^2 + 2x + 1 - 75 \\ 110 &= 2x \\ x &= 55. \end{aligned}$$

Entonces, el lado del cuadrado es 55, pero lo que queremos conocer es y. Sustituyendo en la ecuación $x^2 + 36 = y$ obtenemos $(55)^2 + 36 = 3061$.

Solución del problema 49. La respuesta es (a).
Factorizamos

$$\begin{aligned} 2^{16} - 1 &= (2^8 - 1)(2^8 + 1) \\ &= (2^4 - 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1) \\ &= (2^2 - 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1) \\ &= 3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 257. \end{aligned}$$

Como los números 3, 5, 17, 257, son todos primos, tenemos que la suma es 282.

Solución del problema 50. La respuesta es (c).
Separemos en casos según la cantidad de dígitos:

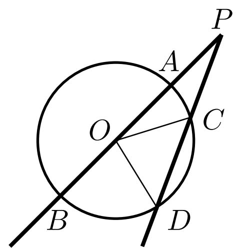
a) El máximo de dígitos que tienen los números menores a cien mil es 5. Tenemos 9 formas de escoger el dígito de las decenas de millar, pues se puede escoger cualquier número del 1 al 9 (el cero no, porque entonces el número sería de 4 dígitos, no de 5). Para cada una de estas formas se puede escoger las unidades de millar, ahora si, como cualquiera de los dígitos del 0 al 9, es decir, de 10 formas. para cada una de la combinaciones de decenas y unidades de millar se puede escoger el dígito de las centenas también de 10 formas. Una vez que se tiene escogida la mitad de los dígitos, dado que el número es capicúa, el resto del número se completa copiando el dígito correspondiente, por ejemplo: si ya escogimos $893\_\_\,\_\_$, debemos finalizarlo en 9 y 8 para que quede el número capicúa 89398. En este caso tenemos $9 \times 10 \times 10 = 900$ números.
b) Para números de 4 dígitos, se hace un procedimiento similar: 9 formas de escoger las unidades de millar y 10 formas de escoger las centenas: $9 \times 10 = 90$ números.
c) Para números de 3 dígitos, es igual al caso anterior, 90 números. Son los mismos que en el caso anterior pero sin uno de los dígitos centrales repetido.
d) De dos dígitos son 9, los nueve que se pueden formar utilizando cada uno de los dígitos del 1 al 9 dos veces.
e) Todos los números de un dígito se leen igual al derecho y al réves. Tenemos 9 números más.
En total, tenemos $900 + 90 + 90 + 9 + 9 = 1098$ números capicúas menores que cien mil.

Solución del problema 51. La respuesta es (b).
Analicemos las potencias de los números n según sus terminaciones:
Si n termina en 1, entonces sus potencias también.
Si n termina en 0, 2, 4, 6 u 8, entonces todas sus potencias son pares, así que no terminan en 1.
Si n termina en 5, entonces sus potencias también.
Si n termina en 9, entonces n^2 termina en 1, así que todas las potencias pares de n terminan en 1.
Si n termina en 3 ó 7, entonces n^2 termina en 9, así que n^4 termina en 1 como también todas las potencias múltiplos de 4.
El exponente 20 es par y además, múltiplo de 4. Entonces, lo que debemos contar es cuántos números del 1 al 2004 terminan en 1, 3, 7 ó 9. Como por cada 10 números hay 4 con esta propiedad, del 1 al 2000 hay $4 \times \frac{2000}{10} = 800$. Del 2000 al 2004 sólo están el 2001 y el 2003. El resultado es 802.

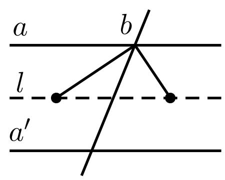
Solución del problema 52. La respuesta es (b).
El segmento OC es un radio y con esto tenemos que el triángulo OPC es

isósceles, entonces $\angle BPD = \widehat{AC}$ y $\angle BOD = \widehat{DB}$, por ser ángulos centrales. Tenemos que $\angle BPD = \frac{\widehat{DB}-\widehat{AC}}{2}$ y $\angle BPD = \frac{\angle BOD - \angle BPD}{2}$, con lo cual

$$\frac{\angle BPD}{\angle BOD} = \frac{1}{3}.$$



Solución del problema 53. La respuesta es (b).
El conjunto de puntos que equidista de a y a' es una línea paralela a éstas que pasa entre ellas (l). Ahora, para encontrar los puntos que también equidistan de b, trazamos las bisectrices de los ángulos formados por a y b y consideramos los puntos donde estas bisectrices intersectan a l. Así de esta manera, obtenemos sólo dos puntos que equidistan de las tres rectas dadas.



Solución del problema 54. La respuesta es (a).
Sean a y b los catetos del triángulo. Tenemos que $8^2 = a^2 + b^2$ y $\frac{a \cdot b}{2} = 9$. El perímetro es igual a $a + b + 8 = \sqrt{a^2 + 2a \cdot b + b^2} + 8 = \sqrt{64 + 2a \cdot b} + 8 = \sqrt{64 + 36} + 8 = 18$, por lo tanto, el perímetro es 18.

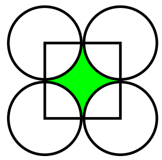
Solución del problema 55. La respuesta es (b).
Sumando las dos ecuaciones dadas obtenemos que $10a + 10b = 20$, y de aquí obtenemos que $a + b = 2$.

Solución del problema 56. La respuesta es (c).
Multiplicando $\frac{x-3\sqrt{2004}}{3-y\sqrt{2004}}$ por el conjugado del denominador obtenemos que

$$\frac{x - 3\sqrt{2004}}{3 - y\sqrt{2004}} = \frac{3x - 6012y + \sqrt{2004} \cdot (xy - 9)}{9 - 2004y^2},$$

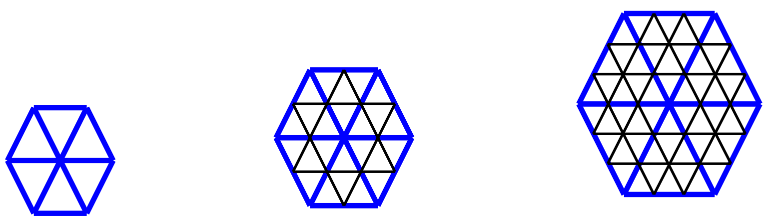
para que esta expresión sea racional, $(xy-9)\sqrt{2004}$ debe ser racional, entonces $xy = 9$.

Solución del problema 57. La respuesta es (c).
El área sombreada es igual al área del cuadrado que forman los centros de los círculos menos un cuarto de cada círculo. Como son 4 círculos, tenemos que el área sombreada es aproximadamente $4-\pi \approx$ .86.



Solución del problema 58. La respuesta es (b).
x^2-y^2, se factoriza como $(x+y)(x-y)$, como 13 es primo $x+y$ es 13 o es 1, y $x-y$ es 1 o 13,dado que son positivos. Sumando ambas ecuaciones obtenemos que $2x = 14$, entonces $x = 7$ y $y = 6$.

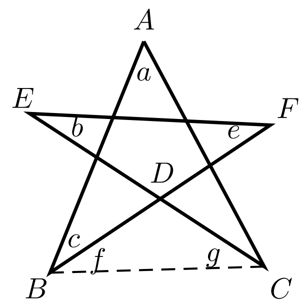
Solución del problema 59. La respuesta es (b).
Cada hexágono está formado por 6 triángulos grandes. El número de triángulos chicos en cada triángulo grande está en correspondencia con la sucesión 1^2, 2^2, 3^2, . . . , entonces, en cada triángulo grande del 9^{no} hexágono tendremos 9^2 triágulos chicos. En total tendremos $6 \cdot 81 = 486$ triángulos.



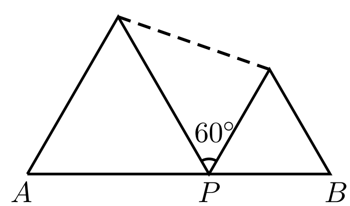
Solución del problema 60. La respuesta es (c).
$\sqrt{2004^{2004}} = 2004^{1002} = (2^2 \cdot 501)^{1002} = 2^{2004} \cdot 501^{1002}$, entonces, 2^{2002} divide a la raíz cuadrada de 2004^{2004}.

Solución del problema 61. La respuesta es (d).
Sean a y b los lados del rectángulo, entonces tenemos que $a \cdot b = 45$. Dado que un lado mide 9 entonces el otro mide 5. Como el perímetro es $2a+2b$, tenemos que el resultado es 28.

Solución del problema 62. La respuesta es (c).
Considerando el triángulo ABC obtenemos que $a+c+f+g+d=180°$, pero de los triángulos BCD y FED obtenemos que $f+g=b+e$. Por lo tanto, $a+b+c+d+e=180°$.



Solución del problema 63. La respuesta es (c).
Sea d la distancia entre los vértices. Como $\frac{AP}{PB}=\frac{3}{2}$ y $AP+PB=10$, entonces $AP=6$ y $PB=4$. Por ley de cosenos $d^2=AP^2+PB^2-2AP\cdot PB\cdot\cos 60°=36+16-24=28$, con lo cual $d=2\sqrt{7}$, por lo tanto la distancia es $2\sqrt{7}$.

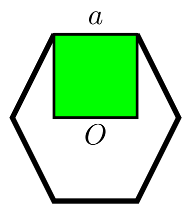


Solución del problema 64. La respuesta es (c).
El número 1826317 es el que se repite, entonces obtenemos un ciclo cuyo periodo es 7. El múltiplo de 7 más cercano a 2005 es 2002, por lo tanto, los últimos tres dígitos son 1, 8 y 2.

Solución del problema 65. La respuesta es (b).
Completando el trinomio cuadrado perfecto tenemos que $a^2+2ab+b^2=\frac{5ab}{2}+2ab$, entonces $(a+b)^2=\frac{9ab}{2}$. Ahora, restamos $4ab$ y factorizamos, $2(a-b)^2=ab$. Calculamos el cociente y obtenemos que $\frac{a+b}{a-b}=\pm 3$.

Solución del problema 66. La respuesta es (b).
Sumando las tres ecuaciones tenemos que $(x+y+z)^2=81$, lo que implica que $x+y+z=\pm 9$, del cual se desprenden las soluciones $x=\frac{26}{9}, y=\frac{27}{9}, z=\frac{28}{9}$ y $x=\frac{26}{9}, y=\frac{27}{9}, z=\frac{28}{9}$.

Solución del problema 67. La respuesta es (d).
Sea a la medida del lado del hexágono, entonces el área del cuadrado es a^2, y la del hexágono es semiperimetro por apotema igual a $\frac{6a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$, entonces la razón es $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.



Solución del problema 68. La respuesta es (d).
Por el principio multiplicativo tenemos $5!$ números a sumar. Notemos que en las unidades, decenas, centenas, unidades de millar, y decenas de millar aparecen 4! 1's, 2's, 3's, 4's y 5's, y la suma en cada uno es $\frac{4!\cdot 5\cdot 6}{2}$. Sumando directamente tenemos que la suma es 3999960.

Solución del problema 69. La respuesta es (a).
Notemos que 3^1 termina en 3, 3^2 termina en 9, 3^3 termina en 7, 3^4 termina en 1, y de aquí en adelante se repite el ciclo. Como el periodo del ciclo es 4 y el múltiplo de 4 más cercano es 2004, entonces, 3^{2005} termina en 3.

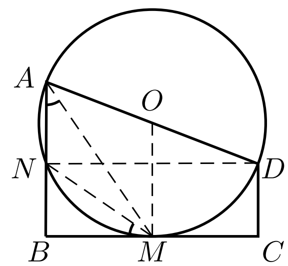
Solución del problema 70. La respuesta es (b).
Factorizando tenemos que $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$, pero $a + b = 1$ por lo que $a^3 + b^3 = a^2 - ab + b^2$. Por otro lado, como $a^2 + b^2 = 2$, tenemos que $a^3 + b^3 = 2 - ab$. Finalmente, observemos que $2ab = (a+b)^2 - (a^2 - ab + b^2) = (1)^2 - (2) = -1$ de donde $ab = -\frac{1}{2}$ y $a^3 + b^3 = \frac{5}{2}$.

Solución del problema 71. La respuesta es (b).
Digamos que las aristas miden a, ar, ar^2. Entonces, el volumen del paralelepípedo es $a \cdot ar \cdot ar^2 = 8$, de donde $(ar)^3 = 8$ y $ar = 2$. Por otra lado, la superficie es $2a^2r + 2a^2r^2 + 2a^2r^3 = 2\cdot ar(a + ar + ar^2) = 4(a + ar + ar^2) = 32$. Pero justamente $4(a + ar + ar^2)$ es la suma de las aristas del paralelepípedo.

Solución del problema 72. La respuesta es (b).
Si $mn = m + n$, entonces $(m-1)(n-1) = 1$. Tenemos que $m - 1 = n - 1 = 1$ o $m - 1 = n - 1 = -1$. Por lo tanto $(m, n) = (2, 2)$ ó $(m, n) = (0, 0)$.

Solución del problema 73. La respuesta es (b).
La ecuación es equivalente a $2 \cdot 4^x = 4^x + 64$, entonces, $4^x = 64$. De aquí obtenemos que $x = 3$. Sólo hay una solución.

Solución del problema 74. La respuesta es (d).
$ABCD$ es un trapecio, así que su área es $BC(AB+CD)/2$. Buscamos expresar BC en términos de AB y CD. Sea M el punto donde BC es tangente al círculo, y sea N el punto donde el segmento AB intersecta al círculo. Entonces, $\angle AND$ es recto, dado que AD es diámetro. Tenemos que $BCDN$ es rectángulo y $BN = CD$. $\angle OMB$ es recto porque BC es una tangente, entonces, OM es paralela a CD y M es el punto medio de BC. Los ángulos $\angle BAM$ y $\angle BMN$ son iguales porque ambos intersectan el arco MN y uno es inscrito y el otro semi-inscrito. Entonces, $\triangle ABM$ y $\triangle MBN$ son semejantes. De aquí obtenemos que $BM^2 = BN{\cdot}BM$. Entonces $BC = 2\sqrt{CD \cdot BA}$, por lo tanto, $|ABCD| = (AB + CD)(\sqrt{CD \cdot BA})$. Esto es un entero si $AB \cdot CD$ es cuadrado perfecto, es decir, cuando $AB = 9$ y $CD = 4$.



Solución del problema 75. La respuesta es (c).
El promedio verdadero A es $(x + y + z)/3$. El estudiante calculó

$$B = \frac{\frac{x+y}{2} + z}{2} = \frac{x + y + 2z}{4}$$

Entonces,

$$B - A = \frac{2z - x - y}{12} = \frac{(z - x) + (z - y)}{12},$$

que siempre es positivo ya que $z > x$ y $z > y$.

Solución del problema 76. La respuesta es (a).
En cualquier triángulo con lados a, b, c el ángulo opuesto a a si $a^2 < b^2 + c^2$. Aplicando este hecho para el triángulo de lados x, 24 y 10 encontramos que

$$\begin{aligned} x^2 <&\ \ 10^2 + 24^2 = 26^2, \\ 24^2 <&\ \ x^2 + 10^2 \Longleftrightarrow 476 < x^2, \\ 10^2 <&\ \ x^2 + 24^2 = 26^2. \end{aligned}$$

La primer desigualdad nos dice que $x < 26$, la segunda nos dice que $x \geq 22$ (x es un entero) y la tercera es válida para todo entero x. Entonces existen 4 valores posibles para x : 22, 23, 24, 25.

Solución del problema 77. La respuesta es (b).
Por el teorema de Pitágoras en $\triangle CBA$, la diagonal AC mide 5. Como $5^2+12^2 = 13^2$, DAC es triángulo rectángulo. Así el área de $ABCD$ es

$$|CBA| + |CDA| = \frac{3 \cdot 4}{2} + \frac{5 \cdot 12}{2} = 36.$$

Solución del problema 78. La respuesta es (c).
Juan obtuvo el doble de canicas que Jorge, entonces la cantidad de canicas que se tomaron debe de ser divisible por 3; es decir, la diferencia entre 140 y el número de canicas rojas debe ser divisible por 3. De los seis números posibles sólo 23 tiene esta propiedad. Entonces, hay 23 canicas rojas, dejando $19 + 25 + 34 = 78$ canicas para Juan y $18 + 21 = 39$ para Jorge.

Solución del problema 79. La respuesta es (b).
La diferencia debe ser mayor que cero, por lo que los números son diferentes entre sí. Así, sólo tenemos que considerar ternas de la forma $(x, x + a, x + 2a)$, y considerar sus permutaciones. Si $a = 1$, $x = 1, 2, 3, 4$. Si $a = 2$, $x = 1, 2$. Finalmente, si $a \geq 3$, como $x \geq 1$ $x + 2a \geq 7$. Entonces, sólo hay 6 ternas con sus seis respectivas permutaciones, por lo tanto la probabilidad es $\frac{6^2}{6^3} = \frac{1}{6}$.

Solución del problema 80. La respuesta es (a).
Sea k un entero positivo. Entonces,

$$(10^k + 1)^2 = 10^{2k} + 2(10^k + 1).$$

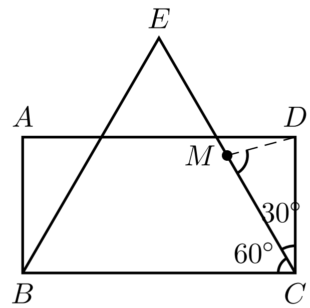
Así la suma de los dígitos es $1 + 2 + 1 = 4$. Obsérvese que no importa en que base estemos.

Solución del problema 81. La respuesta es (a).
Sea n el número de lados del polígono. La suma de los ángulos interiores de un polígono es $(n - 2)(180)$ grados, y la suma de n términos de una progresión aritmética es $\frac{n}{2}$ veces la suma del primero y el último término. Entoces,

$$(n - 2)(180) = \frac{n}{2}(140 + 100).$$

Despejando n obtenemos que $n = 6$.

Solución del problema 82. La respuesta es (b).
Notemos que el ángulo ECB es de $60°$, por ser un ángulo del triángulo equilátero BCE, con esto tenemos que el $\angle ECD$ es igual a $90° - 60° = 30°$. Ahora, como $CM = \frac{CE}{2} = \frac{BC}{2} = AB = CD$, tenemos que el triángulo CDM es isósceles, por lo tanto, el $\angle CMD = 75°$.

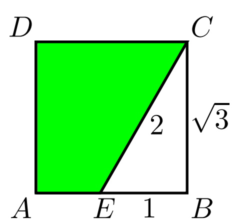


Solución del problema 83. La respuesta es (b).
Sea $N = 10b + a$ el entero original, donde a es el último dígito. La condición del problema nos dice que b divide a N. Como $10b = N - a$ entonces b divide a $N - a$, por lo tanto, b divide a a. Si $a = 0$, entonces b divide a 0 para todo entero $b \neq 0$. Todos los múltiplos de 10 cumplen, los cuales son 200. Si $a \neq 0$, entonces b divide a a implica que b es un número de un solo dígito, y tenemos las posibilidades:

$$N = 11,\ 12,\ \ldots,\ 19,\ 22,\ 24,\ 26,\ 28,\ 33,\ 36,\ 39,\ 44,\ 48,\ 55,\ 66,\ 77,\ 88,\ 99.$$

Por lo tanto, en total cumplen 223 números.

Solución del problema 84. La respuesta es (d).
Por el teorema de Pitágoras tenemos que $BC^2 = 2^2 - 1^2 = 3$, es decir, $|ABCD| = 3$. Además, $|EBC| = \frac{EC \cdot BC}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Entonces, $|AECD| = 3 - \frac{\sqrt{3}}{2}$, por lo tanto, $\frac{|AECD|}{|EBC|} = \frac{6-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} - 1$.



Solución del problema 85. La respuesta es (c).
Sumamos de dos formas diferentes los 77 términos.
$(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7)+\ldots(x_{71}+x_{72}+x_{73}+x_{74}+x_{75}+x_{76}+x_{77}) \geq 0$,
$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11}) + \ldots$
$+(x_{69} + x_{68} + x_{69} + x_{70} + x_{71} + x_{72} + x_{73} + x_{74} + x_{75} + x_{76} + x_{77}) \leq 0.$

Por lo tanto, la suma es cero.

Solución del problema 86. La respuesta es (a).
Sean a, b, c el número de elementos de A, B, C, respectivamente. De la información dada obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\frac{87a+73b}{a+b}=79, \frac{73b+91c}{b+c}=83.$$

Simplificando obtenemos $4a=3b$ y $5b=4c$. Ahora necesitamos obtener el valor de

$$N=\frac{87a+73b+91c}{a+b+c}.$$

Sustituyendo $a=\frac{3}{4}b$ y $c=\frac{5}{4}b$ obtenemos que $N=34$

Solución del problema 87. La respuesta es (d).
Las ecuaciones $a=bc$, $b=ca$, $c=ab$ implican que $abc=(ab)(bc)(ca)=(abc)^2$. Entonces $abc=0$ o $abc=1$. Por otra parte, $abc=a^2=b^2=c^2$. Si $abc=0$, tenemos que $a=b=c=0$, obteniendo la terna $(0,0,0)$. Si $abc=1$, tenemos que $a=b=c=1$. Analizando todas las posibilidades, tenemos que sólo cumplen las siguientes ternas: $(1,1,1)$, $(-1,-1,1)$, $(-1,1,-1)$, $(1,-1,-1)$. Por lo tanto, hay 5 ternas.

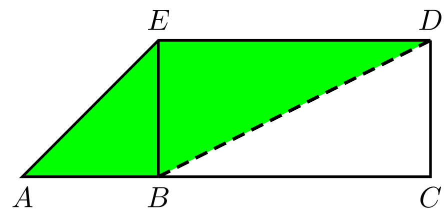
Solución del problema 88. La respuesta es (b).
Tenemos que $x^2=6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots}}}$, es decir, $x^2=6+x$. Resolviendo esta ecuación cuadrática tenemos dos posibles soluciones: $x=3$ y $x=-2$. Pero x debe ser positivo, entonces $x=3$. Análogamente, tenemos que $y^2=6-y$, de donde obtenemos que $y=2$. Por lo tanto, $x-y=1$.

Segunda solución: Como $x^2=6+x$ y $y^2=6-y$ tenemos que $x^2-y^2=x+y$, esto es,

$$(x-y)(x+y)=x+y.$$

Dado que x y y son positivos, tenemos que $x+y$ también lo es, entonces, dividiendo entre $x+y$ ambos lados de la ecuación obtenemos que $x-y=1$.

Solución del problema 89. La respuesta es (c).
El área del triángulo ABE es $|ABE|=\frac{AB\cdot BE}{2}=72\ cm^2$. Como es triángulo isósceles tenemos que $AB=12\ cm$, y de esto a su vez que $DE=24\ cm$, con lo cual obtenemos que el área del triángulo BDE es $|BDE|=\frac{AB\cdot DE}{2}=144\ cm^2$, por lo tanto, el área del cuadrilátero $ABDE$ es $216\ cm^2$.



Solución del problema 90. La respuesta es (d).
Digamos que el índice de la primera base es b. Entonces el primer aldeano dijo $2b+6$ personas usan esa base y que $2b+2$ usan la otra, cuyo índice es $b+4$. El segundo aldeano debe de estar usando la base $b+4$ de lo contrario habría $2b+5$ personas en total y $2b+6$ usando base b. Entonces el segundo dijo que hay $2(b+4)+5 = 2b+13$ personas en total, que $(b+4)+3 = b+7$ usan ambas bases y uno no sabe escribir. Utilizando el principio de inclusión-exclusión, el total de la poblacion equivale a $(2b+6)+(2b+2)-(b+7)+1 = 3b+2$. Tenemos que $2b+13 = 3b+2$, de aquí obtenemos que $b = 11$ y la población de Abace es de 35 personas.

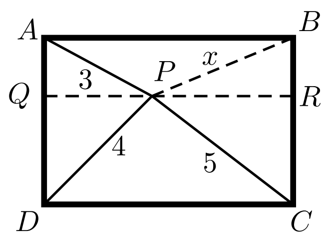
Solución del problema 91. La respuesta es (a).
Sean Q y R los pies de las perpendiculares trazadas desde P hacia los segmentos AD y BC, respectivamente. Utilizando el Teorema de Pitágoras obtenemos que

$$PA^2 - PD^2 = QA^2 - QD^2 = RB^2 - RC^2 = PB^2 - PC^2.$$

Sea $x = PB$, entonces, de la expresión anterior tenemos que

$$3^2 - 4^2 = x^2 - 5^2,$$

de aquí tenemos $x^2 = 18$. Por lo tanto, $x = PB = 3\sqrt{2}$.



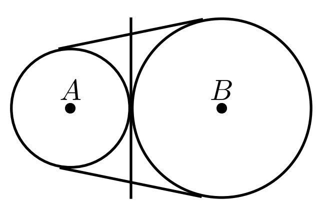
Solución del problema 92. La respuesta es (d).
Dividimos $F = \{1, 2, 3, \ldots, 50\}$ en 7 subconjuntos F_0, F_1, $\ldots$, F_6, tales que todos los elementos de F_i tienen el mismo residuo cuando son divididos por 7:

$$
\begin{aligned}
F_0 = &\ \{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49\}\\
F_1 = &\ \{1, 8, 15, 22, 29, 36, 43, 50\}\\
F_2 = &\ \{2, 9, 16, 23, 30, 37, 44\}\\
F_3 = &\ \{3, 10, 17, 24, 31, 38, 45\}\\
F_4 = &\ \{4, 11, 18, 25, 32, 39, 46\}\\
F_5 = &\ \{5, 12, 19, 26, 33, 40, 47\}\\
F_6 = &\ \{6, 13, 20, 27, 34, 41, 48\}.
\end{aligned}
$$

Notemos que S puede contener a lo más un miembro de F_0, y si S contiene algún miembro de cualquiera de los otros subconjuntos, entonces éste puede contener a todos los miembros de ese subconjunto. También, S no puede contener miembros de F_1 y F_6 al mismo tiempo, o F_2 y F_5, o F_3 y F_4. Como F_1 contiene 8 miembros y cada uno de los otros subconjuntos contiene 7 miembros, el subconjunto S más grande puede ser construido seleccionando un miembro de F_0, todos los miembros de F_1, todos los miembros de F_2 o F_5 y, todos los miembros de ya sea F_3 o F_4. Por lo tanto, el subconjunto S más grande contiene $1 + 8 + 7 + 7 = 23$ elementos.

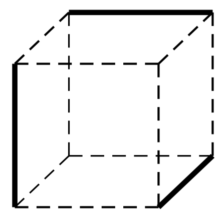
Solución del problema 93. La respuesta es (c).
Observemos que si $a_1, a_2, \ldots$ y $b_1, b_2, \ldots$ son progresiones aritméticas con diferencias d_1 y d_2, respectivamente, entonces la sucesión $a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots$ es una sucesión aritmética con diferencia $d_1 + d_2$. Como $a_1 + b_1 = a_{100} + b_{100} = 100$, la diferencia de la sucesión $a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots$ es 0. Entonces, la suma de los primeros 100 términos de la sucesión es $100(a_1 + b_1) = 100 \cdot 100 = 10,000$.

Solución del problema 94. La respuesta es (c).
El conjunto de líneas que están a 2 unidades del punto A es el conjunto de tangentes a el círculo con centro en A y radio 2. Análogamente para B. Entonces, el conjunto de líneas es el conjunto de tangentes comunes a ambos círculos. Como $AB = 5 = 3 + 2$, estos dos círculos son tangentes exteriormente, así que tienen 3 tangentes en común.



Solución del problema 95. La respuesta es (b).
Como hay 6 caras y cada arista es compartida por sólo 2 caras, debe de haber

al menos $6/2 = 3$ aristas negras. El diagrama muestra que 3 aristas negras es suficiente.



Solución del problema 96. La respuesta es (b).
Sea N un entero positivo y d un divisor de N. Entonces N/d es también un divisor de N. Como los divisores de N ocurren en parejas $(d, N/d)$, y estos divisores serán distintos a menos que N sea un cuadrado perfecto y $d = \sqrt{N}$, se sigue que N tiene un número impar de divisores si y sólo si N es un cuadrado perfecto. Sólo hay 7 cuadrados perfectos menores que 50: 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2.

Solución del problema 97. La respuesta es (c).
Como $\angle BAF$ y $\angle ADE$ son ambos complementarios con $\angle CAD$, entonces deben ser iguales. Así , $\triangle BAF$ es semejante a $\triangle ADE$, por lo tanto,

$$\frac{BF}{AE} = \frac{AF}{DE},$$

o

$$\frac{BF}{3} = \frac{3 + EF}{5}.$$

Por un argumento análogo, $\triangle BCF$ es semejante a $\triangle CDE$, entonces

$$\frac{BF}{CE} = \frac{CF}{DE},$$

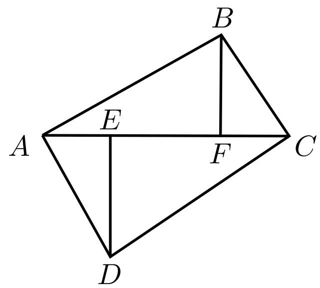
y

$$\frac{BF}{7} = \frac{7 - EF}{5}.$$

Si resolvemos el sistema

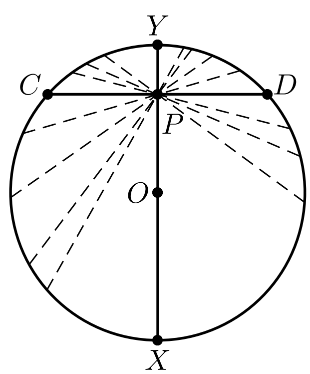
$$\begin{aligned} 5BF - 3EF &= 9 \\ BF + 7EF &= 49 \end{aligned}$$

obtenemos que $BF = 4.2$.



Solución del problema 98. La respuesta es (c).
Sea N un número *cuadradísimo*, la primera condición nos dice que el número sólo contiene a las cifras 0,1,4,9. Con estas cifras los números de a lo más 2 dígitos que son cuadrados son 0, 1, 4, 9, 49, es decir, las parejas de dígitos son 00, 01, 04, 09, 49. Como $N < 2005$, N tiene a lo más tres digitos. Si N tiene tres dígitos, dado que 100, 400, 900 son cuadrados, N no puede terminar en 01, 04, 09 ya que la diferencia entre 2 cuadrados diferentes mayores que 100 es mayor que 10. Además, 149, 449 y 949 no son cuadrados. Por lo tanto, las únicas posibilidades son $N = 0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 49,\ 100,\ 400,\ 900$.

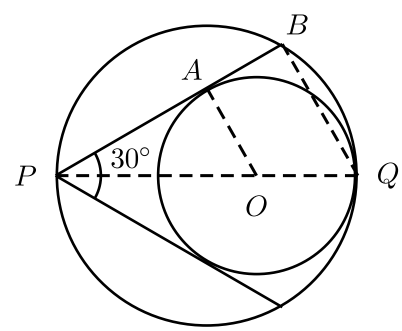
Solución del problema 99. La respuesta es (b).
La cuerda más larga por P es el diámetro, XY, el cual tiene longitud 30. La línea más corta por P, CD, es perpendicular a este diámetro. Así, su medida es $2\sqrt{15^2 - 9^2} = 24$. Mientras las cuerdas rotan sobre P, sus medidas van tomando todos los valores reales entre 24 y 30. Entonces, para cada uno de los 5 enteros k estrictamente entre 24 y 30 existen 2 cuerdas de longitud k que pasan por P. Obtenemos un total de $2+5\cdot 2 = 12$ cuerdas con medidas enteras.



Solución del problema 100. La respuesta es (b).
Sea O el centro de la circunferencia que está dentro, y sea Q el punto de tangencia entre las dos circunferencias. Sea A uno de los puntos de tangencia entre la circunferencia chica y el ángulo dado, y sea B el punto de intersección de la recta PA con la circunferencia grande. Como PQ es bisectriz del ángulo dado, entonces $\angle QPA = 30°$. Sea r el radio de la circunferencia chica. Tenemos que $PO = 2 - r$, $AO = r$ y $BQ = 2 \cdot \text{sen}\, 30° = 1$. El triángulo POA es semejante al triángulo PQB, entonces $\frac{PO}{PQ} = \frac{AO}{BQ}$, esto es,

$$\frac{2-r}{2} = \frac{r}{1},$$

de donde obtenemos que $r = \frac{2}{3}$.



Concentrado de Respuestas

1.-	(a)	26.-	(c)	51.-	(b)	76.-	(a)
2.-	(a)	27.-	(c)	52.-	(b)	77.-	(b)
3.-	(b)	28.-	(c)	53.-	(b)	78.-	(c)
4.-	(d)	29.-	(b)	54.-	(a)	79.-	(b)
5.-	(a)	30.-	(b)	55.-	(b)	80.-	(a)
6.-	(d)	31.-	(c)	56.-	(c)	81.-	(a)
7.-	(c)	32.-	(d)	57.-	(c)	82.-	(b)
8.-	(c)	33.-	(a)	58.-	(b)	83.-	(b)
9.-	(c)	34.-	(c)	59.-	(b)	84.-	(d)
10.-	(d)	35.-	(c)	60.-	(c)	85.-	(c)
11.-	(b)	36.-	(d)	61.-	(d)	86.-	(a)
12.-	(d)	37.-	(a)	62.-	(c)	87.-	(d)
13.-	(b)	38.-	(b)	63.-	(c)	88.-	(b)
14.-	(a)	39.-	(a)	64.-	(c)	89.-	(c)
15.-	(b)	40.-	(a)	65.-	(b)	90.-	(d)
16.-	(d)	41.-	(b)	66.-	(b)	91.-	(a)
17.-	(d)	42.-	(b)	67.-	(d)	92.-	(d)
18.-	(a)	43.-	(c)	68.-	(d)	93.-	(c)
19.-	(c)	44.-	(d)	69.-	(a)	94.-	(c)
20.-	(c)	45.-	(c)	70.-	(b)	95.-	(b)
21.-	(d)	46.-	(a)	71.-	(b)	96.-	(b)
22.-	(d)	47.-	(c)	72.-	(b)	97.-	(c)
23.-	(b)	48.-	(a)	73.-	(b)	98.-	(c)
24.-	(c)	49.-	(a)	74.-	(d)	99.-	(b)
25.-	(a)	50.-	(c)	75.-	(c)	100.-	(b)

COMITÉ ORGANIZADOR DE LA OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS

Radmila Bulajich Manfrino
(Presidenta)

Anne Alberro Semerena

Ignacio Barradas Bribiesca

Martín Eduardo Frías Armenta

José Antonio Gómez Ortega

Alejandro Illanes Mejía

Jesús Jerónimo Castro

Humberto Montalván Gámez

Antonio Olivas Martínez

Elena Ruiz Velázquez

Carmen Sosa Garza