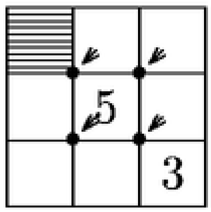
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE YUCATÁN
Facultad de Matemáticas

XIX Olimpiada Mexicana de Matemáticas

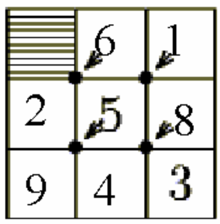
Problemas de Promoción

Problema 1. Dentro del cuadrado de la figura se escriben los números enteros del 1 al 9 (sin repetir). La suma de los 4 números alrededor de cada uno de los vértices marcados con flechas tiene que ser 20. Los números 3 y 5 ya han sido escritos. ¿Qué número debe ir en la casilla sombreada?



<u>Solución</u>

Junto al 3 y al 5 hay que escribir dos números que sumen 12. Como no puede haber repeticiones, la única posibilidad para esos dos números es 8 y 4 (con dos posibilidades para ponerlos).
Ahora, junto al 5 y al 8 hay que escribir números que sumen 20 - (5 + 8) = 7. Para evitar repeticiones las únicas posibilidades son 1 y 6. De la misma manera, vecinos al 5 y al 4 debemos escribir 2 y 9. Ahora, una vez que se ha elegido la forma de escribir el 4 y el 8, hay 4 posibilidades para escribir los números 1 y 6 y 2 y 9, pero sólo una funciona, ya que los cuatro números en la esquina izquierda superior deben también sumar 20.



Por lo tanto el número que se debe colocar en la casilla sombreada es el 7.

Problema 2. ¿Cuál es el resultado de 99 – 97 + 95 – 93 +... + 3 – 1?

<u>Solución</u>

Tenemos 50 números que podemos agrupar de dos en dos:

$$(99 - 97) + (95 - 93) + \dots + (3 - 1).$$

Cada paréntesis contribuye en 2 a la suma, así que la respuesta es 25 x 2 = 50.

Problema 3. ¿Qué dígitos hay que eliminar en el número 4921508 para obtener el número de tres dígitos más pequeño posible?

Solución

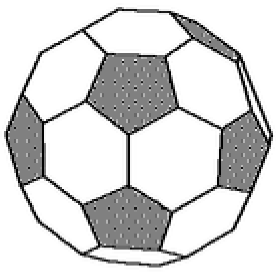
Para el número buscado tenemos cinco opciones para el lugar de las centenas: 4, 9, 2, 1 y 5. La menor de ellas es 1, así que eliminamos los que están antes que 4, 9 y 2. Para las decenas hay dos opciones: 5 y 0, de las cuales la menor es 0, así que eliminamos el 5. Queda el número 108.

Problema 4. Un pedazo rectangular de piel mágica se reduce a la mitad de su longitud y a la tercera parte de su ancho después de cumplirle un deseo a su dueño. Después de tres deseos tiene un área de 4 cm^2. Si su ancho inicial era de 9 *cm*, ¿Cuál era su largo inicial?

Solución:

Cada vez que se concede un deseo, el pedazo de piel se reduce a $\frac{1}{6}$ de su área. Después de conceder 3 deseos, el pedazo de piel tiene un área de $\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$ veces el área original. Al principio, el pedazo de piel tenía un área de 4 x 216 = 864 cm^2, y como se trataba de un rectángulo donde una arista medía 9 *cm*, la otra medía 96 *cm*.

Problema 5. Un poliedro en forma de balón de futbol tiene 32 caras: 20 son hexágonos regulares y 12 son pentágonos regulares. ¿Cuántos vértices tiene el poliedro?

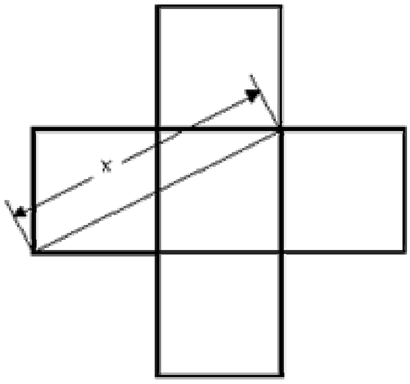


Solución

Observemos que cada vértice lo es de cada pentágono y que dos pentágonos no comparten ningún vértice. Como son 12 pentágonos y cada uno tiene 5 vértices, en total hay 60 vértices.

De otra manera: Hay 20 hexágonos, cada uno con 6 vértices, para un total de 120 vértices. Hay 12 pentágonos, cada uno con 5 vértices, para un total de 60 vértices. Pero cada vértice es compartido por tres figuras, por lo tanto el poliedro tiene $\frac{120+60}{3}=60$ vértices.

Problema 6. La cruz de la figura está formada por cinco cuadrados iguales. Calcula el área de la cruz, sabiendo que x = 10 *cm.*



Solución:

Llamemos L a la longitud de cada cuadrado.

Por el teorema de Pitágoras, para la figura tenemos que $(2L)^2 + L^2 = 10^2$, entonces $4L^2 + L^2 = 100$ y $5L^2 = 100$. De aquí que $L^2 = \frac{100}{5} = 20\,cm^2$.

Como el área del cuadrado es L^2, 5 cuadrados tendrán: $5 \times 20 = 100\ cm^2$.

Problema 7. Este año, al día siguiente de mi cumpleaños, habría sido correcto decir: “Pasado mañana es jueves”. ¿Cuál día de la semana fue mi cumpleaños?

Solución

Del enunciado se concluye que la diferencia en días entre el cumpleaños de la persona y el jueves es tres. Por lo tanto el día del cumpleaños fue lunes.

Problema 8. ¿Cuál es la diferencia entre el mayor y el menor de todos los números que tienen tres cifras distintas entre sí y diferentes de cero?

Solución

El mayor de dichos números es 987 y el menor es 123, por lo que la diferencia entre ellos es 864.

Problema 9. Fidencio es un joven muy inquieto al cual le gusta hacer muchas travesuras durante la clase de la maestra de matemáticas. Ésta, para calmarlo, lo puso a sumar una fila de números ordenados como sigue:

$-1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + 8 ...... + 2000 - 2001 + 2002 - 2003 + 2004$

Para sorpresa de la maestra, el joven le entregó a los 5 minutos una hoja con la suma correcta. ¿Cuál es el número que le entregó Fidencio?

Solución

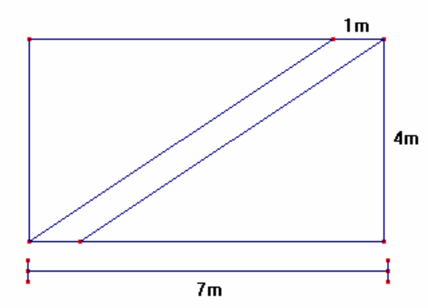
Obsérvese lo siguiente: -1 + 2 = 1
-3 + 4 = 1
-5 + 6 = 1
:
-1999 + 2000 = 1
-20001 + 2002 = 1
-20003 + 2004 = 1

Entonces:
–1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + 8 -..... -1999 + 2000 - 2001 + 2002 - 2003 + 2004 = 1 002

El número entregado por Fidencio es: 1002

Problema 10. En un jardín en forma de rectángulo, con dimensiones de $7m * 4m$ se trazó una vereda diagonal de $1m$ desde las esquinas, como se muestra la figura.

- Calcula el área de la vereda.
- Si el jardinero utiliza para regar 5 litros de agua (por cada metro cuadrado), ¿cuántos litros necesita el jardinero para regar la vereda?



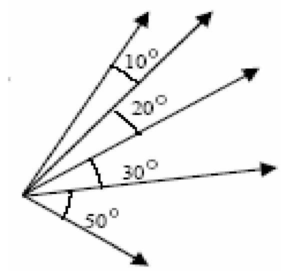
Solución

El área de la vereda es el área total del rectángulo menos el área de los 2 triángulos.
Así: $7m * 4m = 28m^2$. (El área total)

$(6m * 4m) / 2 = 12m^2$ (El área de cada triángulo)

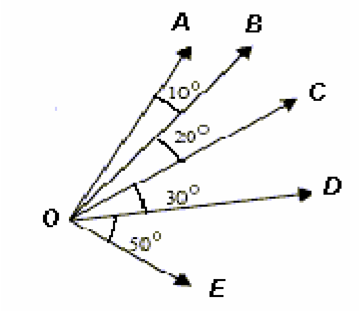
Entonces el área de la vereda es: $28m^2 - 24m^2 = 4m^2$.
Por lo que el jardinero necesita $4 * 5 = 20$ litros de agua.

Problema 11. En la figura, ¿cuántos ángulos hay con diferentes medidas en grados?



Solución

En principio tenemos los cuatro ángulos cuyas medidas son 10º, 20º, 30º, 50º. Por otra parte podemos formar otros ángulos si consideramos la unión de aquellos cuyas medidas son las mencionadas anteriormente.



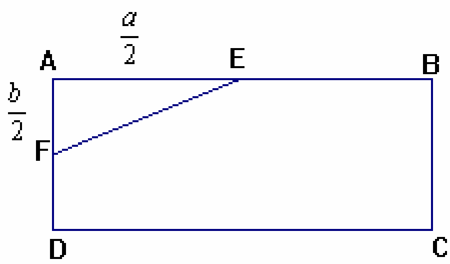
< AOC = 30º
< AOD = 60º
< AOE = 110º
< BOD = 50º
< BOE = 100
< COE = 80º

Como los ángulos deben tener medidas diferentes, entonces se obtienen ocho ángulos: los cuatro mencionados al principio, < AOD, < AOE, < BOE y < COE.

Problema 12. El área de un rectángulo es igual a 1. ¿Cuál es el área del triángulo que se obtiene al cortar el rectángulo por la línea que une los puntos medios de dos lados consecutivos?

Solución

Consideremos el rectángulo ABCD de lados a y b. Sean E y F los puntos medios de los segmentos AB y AD respectivamente. Si trazamos el segmento EF obtenemos la figura siguiente:



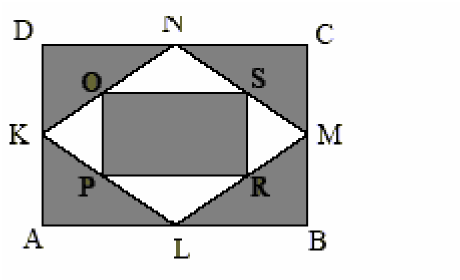
Dado que el triángulo AEF es un triángulo rectángulo, entonces su área es $\dfrac{\frac{a}{2} * \frac{b}{2}}{2} = \dfrac{\frac{ab}{4}}{2} = \dfrac{ab}{8}$. Pero como el rectángulo ABCD tiene área 1, entonces $a * b = 1$. Por lo tanto el área del triángulo AEF es $\dfrac{1}{8}$.

Problema 13. Una sala mide 4m de ancho, 5m de largo y tiene una altura de 3m. Para aumentar su volumen en 60m^3, ¿cuánto es necesario subir el techo?

Solución

El volumen de la sala con las medidas originales es $5m * 4m * 3m = 60m^3$. Si deseemos que el volumen aumente $60m^3$, es decir, que el nuevo volumen sea de $120m^3$, modificando únicamente la medida de la altura del techo, entonces debemos encontrar un número que multiplicado por $20m^2$ de $120m^3$. Dicho número es $6m$. Por lo tanto la altura del techo debe aumentar $3m$.

Problema 14. En la figura: K, L, M y N son puntos medios de los lados del rectángulo ABCD. En la misma forma O, P, R y S son puntos medios de los lados del cuadrilátero KLMN. ¿Qué fracción del rectángulo ABCD esta sombreada?



Solución

Consideremos que a y b representan la longitud de los lados del rectángulo ABCD. Entonces el segmento DK mide $\frac{a}{2}$ y el segmento DN mide $\frac{b}{2}$. Como el trianguló KDN es rectángulo, entonces su área es $\frac{\frac{a}{2}*\frac{b}{2}}{2}=\frac{\frac{ab}{4}}{2}=\frac{ab}{8}$. Análogamente se obtiene que el área de cada uno que los triángulos NCM, MBL y LAK es $\frac{ab}{8}$. Por lo tanto el área representada por los cuatro triángulos es $\frac{ab}{2}$. Es decir, el área representada por los cuatro triángulos es la mitad del área del rectángulo. Entonces, el cuadrilátero KLMN representa también la mitad del área del rectángulo. De lo anterior, concluimos que el área representada por el rectángulo ABCD es la mitad del área del cuadrilátero KLMN, es decir, $\frac{1}{2}\left(\frac{ab}{2}\right)=\frac{ab}{4}$.

Finalmente el área sombreada es $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ del área del rectángulo ABCD, o sea $\frac{3}{4}$ de ab.

Problema 15. Supón un número positivo n divisible entre 21 y entre 9. ¿Cuál es el menor número posible de enteros positivos que dividen a n?

Solución

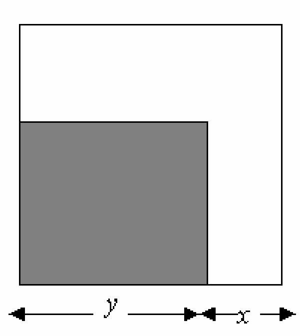
En principio n tiene cuatro divisores: 1, 21, 9 y n. Además n también es divisible entre los divisores de 21 y 9, distintos de la unidad y de ellos mismos , es decir, entre 3 y 7. Por lo tanto, n al menos tiene seis divisores.

Problema 16. ¿Cuántos números de 3 cifras se pueden formar con 0, 1, 2, 2, 2, 2 ?

Solución

Contemos los números según los dígitos que tienen: Con 0, 1, 2 hay 4 números; con 0, 1, 1, hay 2; con 0, 2, 2 hay 2; con 1, 1, 2 hay 3; con 1, 2, 2 hay 3, y con 2, 2, 2, hay 1. En total son 15.

Problema 17. El área del cuadrado sombreado es una tercera parte del área del cuadrado grande. ¿Cuál es la razón $\frac{x}{y}$?



Solución

Como el área del cuadrado sombreado es una tercera parte del área del cuadrado grande, tenemos que $y^2 = \frac{(x+y)^2}{3}$, por lo que $3y^2 = (x+y)^2$, de donde $\frac{x+y}{y} = \sqrt{3}$.

Por lo tanto $\frac{x}{y} = \sqrt{3} - 1$.

Problema 18. Luis, Adrián y Ernesto tomaron 13 dulces de una mesa. Al final, Luis dijo: tomé 2 dulces más que Adrián; Adrián dijo: tomé la mitad de dulces que Luis y 5 menos que Ernesto; y finalmente Ernesto dijo: tomé un número par de dulces. Si sabemos que a lo más uno de ellos mentía. ¿Quién era el mentiroso?

Solución

Llamemos

a al número de dulces que tomó Luis
b al número de dulces que tomó Adrián
c al número de dulces que tomó Ernesto

Según lo que dijeron tenemos que

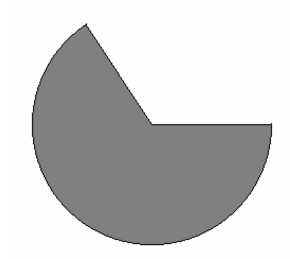
$a = b + 2$
$b = \frac{a}{2}$ y $b = c - 5$
c es un número par

Si Luis dice la verdad, como el número de dulces es $13 = a + b + c = (b+2) + b + c$, tenemos que $11 - c = 2b$, luego $11 - c$ deberá ser par y entonces c no puede ser par. Por lo tanto Ernesto miente.

Si Adrián dice la verdad, tenemos que: $13 = a + b + c = 2b + b + c = 3(c-5) + c$, luego $c = 7$ y no puede ser par, por lo tanto Ernesto miente.

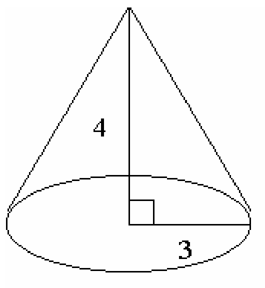
Como no puede haber más de dos mentiroso, Luis o Adrián dicen la verdad. Esto nos lleva a que Ernesto miente.

Problema 19. Un trozo de papel en forma de sector circular (como el que se muestra en la figura) se dobla para formar un cono. Si la altura del cono es 4*cm* y la base es un círculo de perímetro 6π *cm*, ¿cuál es el área del trozo de papel?



Solución

La base del cono es un círculo de radio 3*cm* (pues su perímetro es 6π *cm*). La altura del cono, el radio de la base y el radio del sector circular forman un triángulo rectángulo, como se muestra en la figura. Usando el Teorema de Pitágoras obtenemos que el radio del sector circular es 5*cm*. El perímetro total del círculo sería 10π *cm*; como el borde del pedazo de papel mide solamente 6π *cm* el sector circular representa seis décimos del círculo total. De esta manera, el área buscada es $\frac{6}{10} 25\pi cm^2 = 15\pi cm^2$.



Problema 20. Considera la sucesión 2, 1, 3, 1, 1, 5, 1, 1, 1, 7, 1, 1, 1, 1, 11, ... formada por unos y números primos. Al escribir el número 41, ¿cuántos números unos has escrito?

Solución

Observemos que el número de unos que se han escrito antes de poner el $(n+1)$-ésimo número primo es $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Como el 41 es el décimo tercer número primo, el número de unos que se han escrito antes de escribir el 41 es: $1+2+3+\cdots+12=\frac{12(13)}{2}=78$.

Problema 21. Juan y Ana van al cine que tiene 16 filas de 22 asientos cada una. Cuando llegan al cine hay 175 personas sentadas. Demuestra que es posible encontrar dos asientos vacíos adyacentes para sentarse juntos.

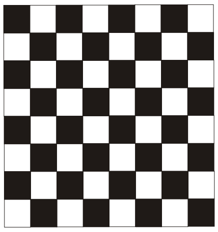
Solución

En el cine hay un total de 352 asientos (22 x 16). Para que Juan y Ana no se pudieran sentar juntos, debe haber, por lo menos 11 personas sentadas dejando un espacio entre ellas:

X		X		X		X		X		X		X		X		X		X		X	

Para que todo el cine estuviera lleno de la manera anterior, se requerirían de por lo menos 176 personas (11 x 16), por lo cual sabemos que habrá, por lo menos, una fila donde haya dos asientos juntos.

Problema 22. En un tablero de ajedrez se coloca una ficha en el cuadro de la esquina y se traslada hasta la esquina opuesta. La ficha va de cuadro en cuadro (horizontalmente y verticalmente).
¿Es posible que la ficha haya pasado por todos los cuadros del tablero exactamente una vez?



Solución

Recordemos que el tablero de ajedrez tiene cuadros blancos y negros. Además, notemos que las esquinas opuestas son del mismo color.
Si se empieza en un cuadro negro obtendremos la siguiente secuencia de colores para cada casilla por donde pasa la ficha:

N→B→N→B→N→B→ .....
1 2 3 4 5 6

Numeremos las letras.
Si la ficha acaba en la esquina recorriendo todos los cuadros, entonces los cuadros totales recorridos son 64, es decir, al número 64 de la secuencia de arriba le debe de "tocar" N.

¿Le puede tocar N al 64?
No, ya que a los pares les toca B y a los impares les toca N.

Por lo tanto, no es posible que pueda recorrer todos los cuadros y acabe en la esquina opuesta.

Problema 23. **¿**Cuál será la última cifra del producto de los primeros 1000 impares?

Solución

La multiplicación será la siguiente:

$$(1)(3)(5)(7)(9) \ldots\ldots. (1997) (1999)$$

Como cualquier número multiplicado por cinco da otro número terminado en cinco, no importa que tan grande sea el número que nos dé como resultado, siempre acabará en cinco.

Problema 24. Manuelita numeró las páginas de un libro de 100 hojas, comenzando con el número 1. Vino Pedro y arrancó 25 hojas. Luego sumó los 50 números escritos en ellos. ¿Es posible que la suma de los números de las 25 hojas arrancadas sea 2004? Justifica tu respuesta.

Solución

Consideremos las 25 hojas arrancadas. En tales hojas hay escritos 50 números de los cuales 25 son pares y 25 son impares. Al efectuar la suma de los 25 números pares obtenemos un número par, ya que par más par es par. Pero al efectuar la suma de los 25 números impares obtenemos un número impar, ya que hay un número impar de sumandos que es 25.
Ahora como la suma de un número par y de un número impar da como resultado un número impar, entonces la suma total de las 50 páginas es un número impar.
Por lo tanto no pueden sumar 2004, ya que 2004 es un número par.

Problema 25. Don conejo Pérez invitó a cinco amigos conejos a su fiesta. Cada amigo llevó a cinco hermanos conejos a la fiesta y cada hermano llevó a cinco hijos conejos; ¿cuántos conejos había en la fiesta?

Solución

Por cada amigo tenemos 5 hermanos conejos, y por cada hermano conejo tenemos 5 hijos conejos, así que en total tenemos $5 * 5 = 25$ hijos conejos, si incluimos a los 5 hermanos conejos y al amigo conejo tendremos un total de 31 conejos por amigo, y como son 5 amigos conejos tendremos un total de $5 * 31 = 155$ conejos. Ah,... pero falta incluir al señor conejo. Por lo tanto en la fiesta se encuentran presentes 156 conejos.

Problema 26. Cada ficha del dominó se puede pensar como una fracción menor o igual a uno. Calcula la suma de todas estas fracciones.

Solución

Coloquemos las fichas de dominó como fracciones menores o iguales que 1:

$\frac{1}{6}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{1}$

$\frac{2}{6}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{2}$

$\frac{3}{6}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{3}{3}$

$\frac{4}{6}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{4}{4}$

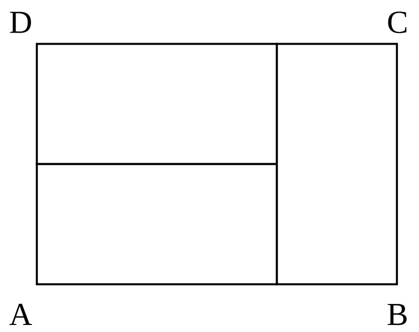
$\frac{5}{6}$ $\frac{5}{5}$

$\frac{6}{6}$

Para sumar estas fracciones observamos que la suma por columnas es $\frac{21}{6}, \frac{15}{5}, \frac{10}{4}, \frac{6}{3}, \frac{3}{2}$ y 1. Luego, la suma total es:

$$\frac{21}{6}+\frac{15}{5}+\frac{10}{4}+\frac{6}{3}+\frac{3}{2}+1=\frac{27}{2}$$

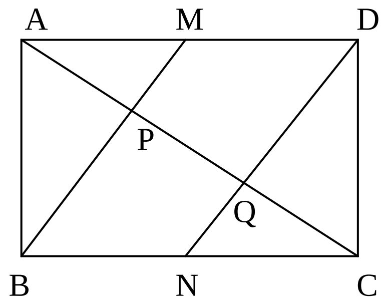
Problema 27. Con tres rectángulos iguales se formó un rectángulo más grande, como el que se muestra en la figura. Si la longitud de BC = 2, ¿cuál es la longitud de AB?



Solución

La longitud de AB es la suma de la longitud del lado mayor y del lado menor de uno de los rectángulos pequeños. Sabemos que los tres rectángulos pequeños son iguales, por lo cual el lado menor de cada uno de ellos mide la mitad de AD, que es igual a la mitad de BC y por tanto es 1. Luego, AB = 2 + 1 = 3.

Problema 28. En el rectángulo de la figura, M y N son los puntos medios de AD y BC, respectivamente, y P y Q son las respectivas intersecciones de AC con BM y con ND. Suponiendo que AD mide 5*cm* y que AB mide 3*cm*, ¿cuántos centímetros tiene de superficie el cuadrilátero MPQD?

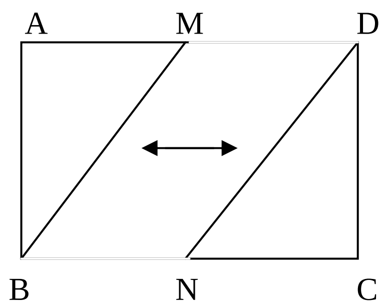


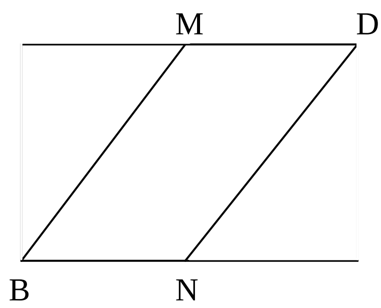
Solución

Observemos que si juntamos los triángulos ABM y DNC, éstos forman un rectángulo de 2.5*cm* x 3 *cm*. El área del rectángulo formado es de 3*cm* x 2.5*cm* = 7.5 cm^2.

Sabemos que el área del rectángulo ABCD es 15 cm^2 (5 x 3), por lo tanto, el área de MBND será 15 cm^2 – 7.5 cm^2 = 7.5 cm^2.

Como el área de MPQD es la mitad del área de MBND, o sea, la mitad de 7.5, el área del cuadrilátero MPQD es de 3.25 cm^2.





Problema 29. Construye el mayor número con las cifras 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4 de tal forma que los dos “unos” estén separados por una cifra, los “dos” por dos cifras, los “tres” por tres y los “cuatros” por cuatro cifras.
Por ejemplo: los números

11223344, 12341234,…

Solución

Para construir el número mayor, empezaremos acomodando las cifras de izquierda a derecha.

Ponemos el primer cuatro hasta la izquierda para asegurar que el número formado sea el mayor. De esta forma queda determinada la posición del segundo cuatro. Es decir,

4 a b c d 4 e f

La siguiente cifra deberá ser un 3, pero no podemos colocar el otro 3 porque no podríamos colocar los demás números.

4 3 b c d 3 e f

Ahora tratemos con un 2. Al poner un 2 nos queda el número:

4 2 b c 2 4 e f

En cuyo caso ya no podemos acomodar los números que faltan en los lugares restantes.

4 2 1 c 1 4 e f

Si ponemos en el segundo lugar un 1 tenemos,

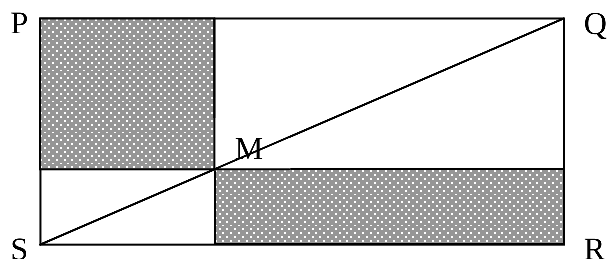
41 b 1 d 4 e f

Después un 3 y luego un 2, los lugares restantes quedan determinados. Obtenemos así el número:

4 1 3 1 2 4 3 2

Que es el mayor número que cumple con las condiciones del problema.

Problema 30. ¿Qué proporción guardan las áreas de las dos regiones grises marcadas en el rectángulo PQRS, si M es un punto cualquiera de la diagonal?



Solución

El segmento MS es la diagonal de un rectángulo, por lo cual los dos triángulos que la tienen como un lado son de la misma área. Lo mismo pasa con MQ y con QS, lo cual implica que las áreas de los rectángulos grises siempre son iguales.