Problemas para la
18ª Olimpiada Mexicana de
Matemáticas

Editado por:

Anne Alberro Semerena

Radmila Bulajich Manfrino

José Antonio Gómez Ortega

2004

Anne Alberro Semerena
Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma del Estado de Morelos.

Radmila Bulajich Manfrino
Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma del Estado de Morelos.

José Antonio Gómez Ortega
Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México.

Presentación

La Sociedad Matemática Mexicana organiza la 18^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Los ganadores en ella formarán la preselección que se preparará para las las distintas olimpiadas internacionales del año 2005: la XLVI Olimpiada Internacional, que se llevará a cabo en México durante el mes de julio, la XX Olimpiada Iberoamericana a celebrarse en septiembre en Ecuador y la VII Olimpiada de Centroamérica y el Caribe que se llevará a cabo en Honduras en el mes de julio.
En la 18^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas pueden participar los estudiantes de México nacidos después del 1^o de agosto de 1985. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del cíclo escolar 2004 - 2005 y para el 1^o de julio del año 2005 no deberán haber iniciado estudios de nivel universitario.
Los problemas que se presentan en este folleto aparecieron en las primeras etapas de las Olimpiadas Estatales de Matemáticas en México. La intención de este folleto es que sirva como orientación a los alumnos que desean participar en estas Olimpiadas. Como se puede ver, los problemas que aparecen aquí, no son ejercicios rutinarios o problemas en los que se apliquen directamente los conocimientos que se adquieren en la escuela. Más bien son problemas que requieren de una buena dosis de ingenio y de esfuerzo para ser resueltos. Como en todos los aspectos del aprendizaje de las matemáticas, el esfuerzo individual y el enfrentamiento solitario con los problemas son importantes, pero también es muy importante la discusión con los compañeros y los profesores.
Una forma de manifestar creatividad en matemáticas es resolviendo problemas. Otra forma, que a veces requiere de más madurez, es inventándolos. Invitamos a todos los lectores de este folleto: profesores, estudiantes, olímpicos y exolímpicos a que nos envíen problemas con solución. Las aportaciones serán consideradas

para su inclusión en exámenes o en futuros folletos.
Esta publicación incluye una seleccción de los problemas que formaron parte de los folletos avanzados elaborados como guías para la 13^a y 14^a olimpiada mexicana de matamáticas. El primero editado por: Omar Antolín, Radmila Bulajich, Carlos Cabrera y José Antonio Gómez; el segundo por: Omar Antolín, Radmila Bulajich, José Antonio Gómez y Rita Vázquez.

Etapas de la Olimpiada

Como ya es tradición, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas consta de tres etapas:

Exámenes Estatales. Estos exámenes servirán para formar las selecciones estatales que asistirán al Concurso Nacional.

Concurso Nacional. Este concurso se llevará a cabo en el Estado de México en noviembre de 2004 y en él se elegirá a la preselección mexicana.

Entrenamientos. A los alumnos de la preselección que surjan del Concurso Nacional se les entrenará intensivamente durante el primer semestre del año 2005. También se les aplicarán exámenes para determinar a los que representarán a México en las Olimpiadas Internacionales.

La participación en las tres etapas mencionadas es **individual**.

Resumen de Resultados

En el año de 1987 la Sociedad Matemática Mexicana organizó la Primera Olimpiada Mexicana de Matemáticas. A partir de esa fecha, los concursos nacionales se han celebrado anualmente en las ciudades de Xalapa, Hermosillo, Metepec, Guanajuato, Oaxtepec, La Trinidad, Acapulco, Guadalajara, Colima, Mérida, Monterrey, Querétaro, Oaxaca, Morelia, Oaxtepec, Colima y Guanajuato.

Resultados de México en las Internacionales

Los resultados de las Delegaciones Mexicanas en Olimpiadas Internacionales, Iberoamericanas y de Centroamérica y el Caribe han sido los siguientes:

Olimpiada Interncional de Matemáticas

Año	País sede	No. de países	Lugar de México
1988	Australia	49	37
1989	Rep. Fed. de Alemania	50	31
1990	Rep. Popular de China	54	36
1991	Suecia	55	35
1992	Rusia	56	49
1993	Turquía	73	63
1994	Hong Kong	69	65
1995	Canadá	74	59
1996	India	75	53
1997	Argentina	82	32
1998	Taiwan	75	44
1999	Rumania	81	52
2000	Corea	82	30
2001	Estados Unidos	83	46
2002	Escocia	84	46
2003	Japón	86	42

En 2003, la delegación que representó a México en la Olimpiada Internacional estuvo integrada por los alumnos: Octavio Arizmendi Echegaray (Morelos), Ana Paula Estrada Vargas (Jalisco), Marco Antonio Figueroa Ibarra (Sonora), Yoalli Mabel Hidalgo Pontet (Jalisco), Antonio Olivas Martínez (Sonora) y Carlos Vargas Obieta (Jalisco). Se obtuvieron 3 medallas de bronce (Marco Antonio Figueroa Ibarra, Antonio Olivas Martínez y Ana Paula Estrada Vargas) y una mención honorífica (Yoalli Mabel Hidalgo Pontet). En total, en las Olimpiadas Internacionales se han obtenido 3 medallas de plata, 21 medallas de bronce y 17 menciones honoríficas.

Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

Año	País sede	No. de países	Lugar de México
1989	Cuba	13	3
1990	España	15	3
1991	Argentina	16	5
1992	Venezuela	16	6
1993	México	16	9
1994	Brasil	16	6
1995	Chile	18	9
1996	Costa Rica	17	2
1997	México	17	3
1998	República Dominicna	18	5
1999	Cuba	20	3
2000	Venezuela	21	2
2001	Uruguay	21	3
2002	El Salvador	22	3
2003	Argentina	19	4

Los cuatro integrantes de la delegación mexicana que participaron en la Olimpiada Iberoamerica de 2003 obtuvieron medalla: una de oro (Marco Antonio Figueroa Ibarra de Sonora), medalla de plata (Antonio Olivas Martínez de Sonora) y dos medallas de bronce (Carlos Vargas Obieta de Jalisco y Adrián Enrique Chi Centeno de Yucatán). En total, en las Olimpiadas Iberoamericanas. México ha obtenido 10 medallas de oro, 22 medallas de plata, 21 medallas de bronce y 3 menciones honoríficas.

Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe

Año	País sede	No. de países	Lugar de México
1999	Costa Rica	10	2
2000	El Salvador	9	2
2001	Colombia	10	2
2002	México	8	1
2003	Costa Rica	11	1

Los 3 alumnos mexicanos en la IV Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe, ganaron 2 medallas de oro, ellos fueron Iván Joshúa Hernández Máynez de Coahuila y Gonzalo Arturo Montalván Gámez de Puebla y una medalla de plata para el alumno Rosemberg Toala Enríquez de Chiapas. En total en la Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe, México ha obtenido 7 medallas de oro, 6 de plata y 2 de bronce.

Resultados del Concurso Nacional de la 17^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas

En noviembre de 2003 se llevó a cabo en Guanajuato, Gto. el 17^a Concurso Nacional, con la participación de todos los estados de la República. Los 16 alumnos ganadores del primer lugar fueron:

Marco Antonio Figueroa Ibarra (Sonora)
Héctor Daniel García Lara (Chihuahua)
Iván Joshua Hernández Máynez (Coahuila)
Rosemberg Toalá Enríquez (Chiapas)
Gonzalo Arturo Montalván Gámez (Puebla)
Carlos Vargas Obieta (Jalisco)
Federico Bribiesca Argomedo (Michoacán)
Rafael Díaz Cruz (Distrito Federal)
Guillermo Enrique Carro Prado (Nuevo León)
José Miguel Cisneros Franco (Veracruz)
Francisco Javier Ibarra Goycoolea (Baja California)
Cristos Alberto Ruiz Toscano (Jalisco)
Guevara Manuel Angel Guevara López (Zacatecas)
Luis Alberto Martínez Chigo (Veracruz)
Arturo Aguirre Escobar (Distrito Federal)
David Guadalupe Torres Flores (Guanajuato)

Los 5 alumnos preseleccionados para la Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe fueron:

Isaac Buenrostro Morales (Jalisco)
Iván Joshua Hernández Máynez (Coahuila)
Jonathan Eliud Rincón Galván (Nuevo León)
Pablo Soberón Bravo (Morelos)
David Guadalupe Torres Flores (Guanajuato)

Aunque la participación en el Concurso Nacional es individual, es importante destacar la labor que han llevado a cabo los estados de la República apoyando a sus concursantes. Con el propósito de reconocer este trabajo, presentamos el registro de los estados que ocuparon los primeros 10 lugares en el 17^a Concurso Nacional.

1. Jalisco
2. Puebla
3. Chihuahua
4. Distrito Federal
5. Sonora
6. Morelos
7. Nuevo León
8. Guanajuato
9. Querétaro
10. Veracruz

En esta ocasión, el premio a la Superación Académica se llamó Quanaxhuato y fue ganado por el Distrito Federal. El segundo y tercer lugar de este premio lo ocuparon, respectivamente, Veracruz y Tlaxcala.

Información sobre la Olimpiada.

Para obtener más información sobre los eventos de la Olimpiada Mexicana de Matemática o para consultar más material de estudio, visita nuestro sitio de Internet:

http://erdos.fciencias.unam.mx/omm

**COMITE ORGANIZADOR DE LA
OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMATICAS**

Mayo 2004

Contenido

Capítulo 1

Enunciados de los Problemas

Presentamos aquí algunos problemas para mostrar el tipo de matemáticas que se manejan en la fase estatal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Al final encontrarás las soluciones.

1.1. Problemas de Práctica

Problema 1. Considere 109 enteros con $0 < a_1 < ... < a_{109} < 1999$. Muestre que entre los valores $d_i = a_{i+1} - a_i$, $i = 1, ..., 108$ hay un valor que se repite 4 o más veces.
Encuentre un ejemplo de enteros $0 < a_1 < ... < a_{109} \leq 1999$ donde ninguna diferencia $d_i = a_{i+1} - a_i$ se repita más de 3 veces.

Problema 2. Sean $a_1, a_2, ..., a_n$ enteros con las propiedades de que:
(i) $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n = n$
(ii) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$
Muestre que 4 divide a n.

Problema 3. Un número de tres cifras es "equilibrado" si una de sus cifras es el promedio de las otras dos, por ejemplo el 258 es equilibrado pues $5 = \frac{2+8}{2}$. ¿Cuántos números equilibrados de tres cifras hay?

Problema 4. Si intentamos cubrir una cuadrícula de 5×5 con piezas de tamaño 2×1, siempre nos quedará un hueco. ¿En qué sitios de la cuadrícula puede quedar el hueco?

Problema 5. ¿Para qué enteros positivos n es posible dividir un triángulo equilátero de lado n en trapecios iguales cuyos lados midan 1, 1, 1 y 2?

Problema 6. Un icosaedro es un sólido regular de 20 caras, cada una de las cuales es un triángulo equilátero. ¿Cuántas diagonales tiene un icosaedro?

Problema 7. Utilizando exclusivamente los dígitos 2 y a se forma el siguiente número de 90 cifras.

$$2a22a222a2222a....22...2a.$$

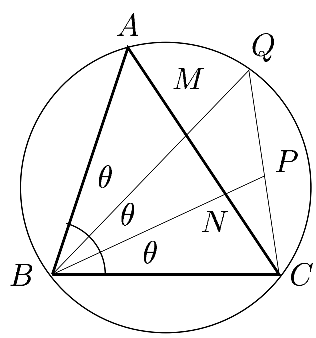
Si el número es múltiplo de 9, ¿qué valores son posibles para el dígito a?

Problema 8. Encuentre todos los enteros positivos a, b tales que:

$$\frac{a+b^{-1}}{a^{-1}+b} = 13 \quad \text{y} \quad a+b \leq 80.$$

Problema 9. Considerando la figura siguiente muestre que:

$$\frac{AM}{AN} + \frac{CP}{CQ} = 1$$



Problema 10. Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, las líneas BD y AC se cortan en el punto P. Si O es el circuncentro del triángulo APB y H es el ortocentro del triángulo CPD, demuestre que O, P y H están alineados.

Problema 11. ¿De cuántas formas distintas se puede llenar una cuadrícula de 4×4 con fichas de 2×1?

Problema 12. En una cárcel hay 10 reos condenados a muerte a los que se les va a dar una última oportunidad para salvarse: se pondrán los 10 en una fila y a cada uno le pondrán un sombrero, ya sea blanco o negro. Cada reo sólo podrá ver el color de los sombreros de sus compañeros de adelante (no podra ver el suyo ni ninguno de los de atrás). Se les irá preguntando, de uno en uno, empezando por el último de la fila y en orden hasta terminar con el primero: "¿Cuál cree que es el color de su sombrero?". Si un reo atina a su color le salvan la vida, si no lo matan. ¿Cómo le pueden hacer los reos para ponerse de acuerdo de tal forma que se salven al menos 9 reos?

Problema 13. El conjunto $\{1, 2, ..., n\}$ se colorea de rojo y negro, de manera que 1 y n reciban diferente color. Muestre que el número de parejas de enteros consecutivos con diferente color es impar.

Problema 14. Una cuadrícula de 8×8 se cubre con 32 dominós de 2×1. Demuestre que al menos existen dos dominós que forman un cuadrado de 2×2.

Problema 15. ¿Cuántos paralelepípedos rectangulares distintos se pueden construir, para los cuales la longitud de cada arista es un entero del 1 al 10?.

Problema 16. ¿Será posible numerar las 4 caras, los 4 vértices y las 6 aristas de un tetraedro, es decir, asignarles un número entero del 1 al 14, de tal manera que el número asignado a una arista sea igual al promedio de los números asignados a los vértices que la determinan, e igual al promedio de los números asignados a las caras que la comparten?

Problema 17. Encuentre una lista de cinco primos diferentes donde la diferencia entre cualesquiera dos términos consecutivos de la lista sea siempre seis. Pruebe que esta lista es única.

Problema 18. Sea ABC un triángulo escaleno de área 1999. Sea A_1 un punto del lado BC y sean B_1 y C_1 puntos sobre las rectas AC y AB respectivamente, tales que AA_1, BB_1 y CC_1 son paralelas. Encuentre el área del triángulo $A_1B_1C_1$.

Problema 19. (i) Pruebe que para todo entero positivo n existen tres enteros a, b, c tales que $n = a^2 + b^2 - c^2$.
(ii) Pruebe que a lo más para 1699 enteros positivos n, $n < 1999$, existen enteros a, b, c tales que $n = a^2 + b^2 + c^2$.

Problema 20. En el plano se marcan $a + b$ puntos; a de ellos se designan con la letra A y los otros b puntos se designan con la letra B. Al unir los puntos consecutivos se forma un polígono de $a + b$ lados. Sobre cada uno de los lados hacemos lo siguiente: si los dos vértices del lado están denotados por letras A, escribimos el número 2; si los dos vértices del lado están denotados por letras B, escribimos el número $\frac{1}{2}$; si los dos vértices del lado están denotados por letras diferentes, escribimos el número 1. ¿Cuál es el producto de todos los números escritos?

Problema 21. Sea ABC un triángulo, D y E los pies de las alturas desde A y B repectivamente. Sean M en la prolongación de BE tal que $EM = AD$ y N la intersección de la prolongación BC con la perpendicular a BM por M. Demuestre que el triángulo NCA es isósceles.

Problema 22. Sea AL la bisectriz del ángulo A de un triángulo acutángulo ABC. Sean M y N sobre los lados AB y AC respectivamente, de manera que $\angle MLA = \angle B$ y $\angle NLA = \angle C$. Si D es el punto de intersección de AL y MN, muestre que $AL^3 = AB \cdot AC \cdot AD$.

Problema 23. Sean ABC un triángulo y L, M, N los puntos medios de los lados BC, CA, AB respectivamente. Muestre que $\angle LAC = \angle MBA$ si y sólo si $\angle CNA = \angle ALB$.

Problema 24. Si a, b y c son números positivos con $a+b+c = 2$, muestre que:

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \geq 1.$$

Problema 25. Considere un triángulo rectángulo ABC y llame P, Q, R, a las reflexiones de A, B, C sobre BC, CA, AB respectivamente. Calcule la razón del área del triángulo ABC entre el área del triángulo PQR.

Problema 26. Dentro de un hexágono regular $ABCDEF$ se coloca un punto G arbitrario y se trazan segmentos que lo unen con los vértices, formando 6 triángulos ABG, BCG, CDG, DEG, EFG, FAG los cuales se colorean en forma alternada de negro y blanco. Demuestre que el área de la región negra es igual al área blanca.

Problema 27. Este es un juego para dos jugadores que se juega en un tablero cuadrado cuadriculado que tiene un número impar de filas y columnas. El juego empieza en la esquina inferior izquierda, donde el primer jugador pone su marca. Los jugadores alternan su jugada. En su turno cada jugador puede poner su marca en una de las casillas contiguas ya sea directamente encima, directamente a la derecha o diagonalmente encima y a la derecha de la última marca puesta por su oponente. El juego continúa de esta forma y gana el jugador que consiga poner su marca en la casilla ubicada en la esquina superior derecha del tablero. Encuentre una estrategia que permita al primer jugador ganar siempre el juego.

Problema 28. ¿Por qué cada vez que tomamos diez números consecutivos existe uno que es primo relativo con cada uno de los otros nueve?

Problema 29. En el triángulo equilátero ABC, una recta paralela al lado BC intersecta a AC en M y a AB en P. Si D es el incentro del triángulo APM y E es el punto medio de PC, determine los ángulos del triángulo BDE.

Problema 30. En cada subconjunto de 7 elementos del conjunto $\{1,2,...,10\}$ se toma el mayor. ¿Cuál es la suma de todos esos elementos mayores?

Problema 31. Sea A un subconjunto de $N = \{1, 2, ..., n\}$ y arreglemos sus elementos en orden decreciente de magnitud. Formemos las sumas S sumando y restando alternadamente elementos consecutivos del subconjunto A (el primer elemento de la suma siempre es positivo). ¿Cuál es la suma de todas las sumas S generadas por los distintos subconjuntos de N?

Problema 32. Si $ABCDEFG$ es un heptágono regular, muestre que

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}.$$

Problema 33. Sea ABC un triángulo y sean E, F puntos sobre los lados CA y AB. Sea D la intersección de BE con CF y suponga que las áreas de los triángulos BDF, CDE y BCD son 3, 3 y 9 respectivamente. Encuentre el área del cuadrilátero $AFDE$.

Problema 34. Una cuadrícula de 3×3 está inicialmente llena con ceros y unos de la siguiente manera:

1	0	1
0	1	0
1	0	1

La cuadrícula se irá modificando con la siguiente regla:
Cada que se coloque una cuadrícula de 2×2 sobre la cuadrícula original, se aumentan en 1 los números de los cuadros comunes. Por ejemplo si la cuadrícula de 2×2 se coloca arriba y a la izquierda del tablero de 3×3, éste queda modificado así:

2	1	1
1	2	0
1	0	1

¿Es posible, repitiendo la regla, llegar a un tablero de 3×3 donde todos los números sean múltiplos de 2?
Si lo es, dé una forma de hacerlo, en caso contrario argumente por qué no es posible.

Problema 35. ¿Es posible que alguna potencia de 2 termine en 1982?

Problema 36. Sea E un punto sobre una circunferencia de diámetro AB. Por los puntos B y E se trazan las rectas tangentes t_1 y t_2, respectivamente, que se cortan en el punto M. Sea C el punto de intersección de las rectas AE y t_1. Demuestre que M es el punto medio de BC.

Problema 37. En la siguiente cuadrícula:

2	1	2	1	2
1	2	1	2	1
2	1	2	1	2
1	2	1	2	1
2	1	2	1	2

una "sustitución" consiste en tomar el número en un cuadro y sumarle o restarle un múltiplo par de alguno de sus vecinos. ¿Es posible que después de varias sustituciones sucesivas queden los números del 1 al 25 en la cuadrícula?

Problema 38. ¿Será posible dividir la superficie de una esfera en un número impar de regiones, todas triangulares?

Nota: Cada dos regiones triangulares son ajenas, o comparten un vértice, o bien tienen un lado completo en común.

Problema 39. Demuestre que no es posible construir un triángulo cuyos lados sean números primos y que su área sea entera.

Problema 40. Se tienen los números del 1 al 100 $(\{1, 2, 3, 4, ..., 100\})$ y cada uno es pintado de rojo, azul, amarillo o verde. Demuestre que hay dos números del mismo color cuya diferencia también es del mismo color.

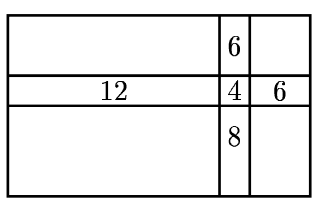
Problema 41. Sea $\mathcal{C}_1$ una circunferencia fija y AB una cuerda en ella. Sean P un punto en uno de los arcos AB y $\mathcal{C}_2$ una circunferencia tangente a $\mathcal{C}_1$ en P y tangente a la cuerda AB. Si Q es el punto de tangencia de AB a $\mathcal{C}_2$, demuestre que el ángulo APQ es constante, para todo punto P sobre el arco AB.

Problema 42. Consideremos un círculo con centro O, A y B puntos en la circunferencia tales que $\angle AOB = 60°$. Sean M un punto cualquiera en el arco AB y P, Q, R, S, los puntos medios de los segmentos AM, OB, OA, BM, respectivamente. Demuestre que PR es perpendicular a PS.

Problema 43. Sean x, y, z números enteros positivos tales que 7 divide a $x^3 + y^3 - z^3$. Pruebe que alguno de ellos es múltiplo de 7.

Problema 44. Pruebe que si un número primo p puede escribirse de la forma $p = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$ con $p_1 < p_2 < p_3$ números primos entonces $p_1 = 3$.

Problema 45. Un rectángulo grande está dividido en 9 rectángulos más pequeños, como muestra la figura. En la parte interior de algunos rectángulos pequeños está escrito su perímetro. ¿Cuál es el perímetro del rectángulo grande?



Problema 46. Se quieren pintar las caras de un dodecaedro de tal forma que si dos caras tienen una arista en común entonces quedan pintadas con colores diferentes. (i) Muestre que no es posible hacer esto con sólo tres colores, (ii) Muestre que es posible lograr esto con cuatro colores.

Problema 47. Si $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 + ... + x_n \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 0$ donde cada x_i es 1 ó -1, demuestre que n es múltiplo de 4.

Problema 48. Encuentre el entero positivo más pequeño que se puede expresar como suma de 9 enteros positivos consecutivos, como suma de 10 enteros positivos consecutivos y como suma de 11 enteros positivos consecutivos (las tres cosas a la vez).

Problema 49. ¿Es posible agrupar los números $1, 2, ..., 100$ en 3 grupos A_1, A_2 y A_3 tales que 102 divida a la suma de los elementos de A_1, 203 divida a la suma de los elementos de A_2 y 304 divida a la suma de los elementos de A_3?

Problema 50. Paula numera un cuaderno con 96 hojas y coloca en las páginas la secuencia del 1 al 192. Juan quita 24 hojas al azar y suma los 48 números escritos en las páginas. ¿Puede ser esta suma igual a 1998?

Problema 51. Dada una cuadrícula de 5×5 se escribe en cada uno de los cuadros un 1 ó un -1. El producto de los números en cada columna es escrito debajo de cada una de ellas. El producto de los números en cada renglón es escrito a la derecha de cada uno de estos. Pruebe que la suma de esos 10 productos no puede ser cero.

Problema 52. Demuestre que si p y q son números primos tales que $\frac{p^2+q^2}{p+q}$ es entero entonces $p = q$.

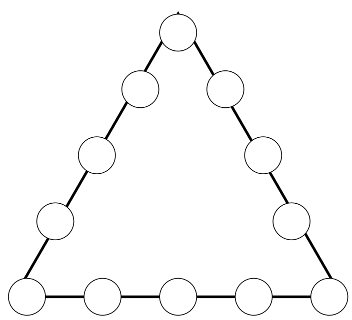
Problema 53. Pruebe que el número de cuatro cifras $N = abcd$ es divisible entre 3 si $(a - 2b + c + 4d)$ es divisible entre 3.

Problema 54. Pablo ha dibujado un cuadrado $ABCD$ con tinta negra y debe colorear con rojo todos los puntos P del interior del cuadrado tales que el área del cuadrilátero $BCPA$ es igual al triple del área del cuadrilátero $APCD$. Describir cuál es la parte roja del dibujo y justificar.

Problema 55. Supongamos que queremos formar 5 pilas de cajas con las siguientes condiciones: cada pila debe tener entre una y cinco cajas, además, cada pila no puede tener más cajas que la pila de su izquierda. ¿De cuántas formas podemos hacer esto?

Problema 56. Tenemos 16 focos acomodados en un tablero de 4×4, todos apagados. Cada vez que alguien toca un foco, este cambia de estado junto con todos los focos de su fila y su columna (Las filas son horizontales y las columnas verticales).
(i) Demuestre que es posible, después de tocar los focos adecuados, que todos los focos queden encendidos.
(ii) Si el tamaño del tablero fuera de 5×5. ¿Sería posible terminar con todos los focos prendidos?

Problema 57. Los números del 1 al 12 se colocan (sin repetir) en los círculos del siguiente arreglo triangular:



(i) Demuestre que no existe una forma de acomodarlos que cumpla que las sumas de los números que están en cada uno de los lados del triángulo sea 27.
(ii) Muestre que si existe un acomodo en que la suma en cada uno de los lados del triángulo sea 28.

Problema 58. Sea $ABCDEFGH$ un octágono regular de radio 1. Demuestra que $AB \cdot AD = AC$.

Problema 59. Demuestre que para 4 puntos no alineados, los cuatro triángulos que estos puntos determinan no pueden ser todos acutángulos.

Problema 60. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo, donde M es el punto medio de BC, N es el punto medio de CD y O es la intersección de las diagonales AC y BD. Demuestre que O es el gravicentro del triángulo AMN si y sólo si $ABCD$ es un paralelogramo.

Problema 61. La colección infinita de números $1, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12,14,16, \ldots$ se ha formado de la manera siguiente: se coloca el primer impar (1), luego se colocan los siguientes dos pares $(2, 4)$, después los tres impares siguientes al último par colocado $(5, 7, 9)$, luego los cuatro pares siguientes al último impar que se colocó y así sucesivamente. ¿Cuál es el número par más cercano a 1998 que aparece en esta colección?

Problema 62. (i) Demuestre que el producto de tres enteros positivos consecutivos no puede ser un cubo.
(ii) Demuestre que sólo existe un primo p tal que el número $2p+1$ es un cubo.

Problema 63. Sean a, b y c tres enteros positivos tales que $a > b > c$. Pruebe que si $a+b$ es múltiplo de c, $b+c$ es múltiplo de a y $a+c$ es múltiplo de b, entonces el cociente $\frac{abc}{a+b+c}$ es un cuadrado.

Problema 64. ¿Cuáles son las posibles áreas de un hexágono con todos los ángulos iguales y cuyos lados miden $1, 2, 3, 4, 5, 6$, en algún orden?

Problema 65. En una cuadrícula de 3×3 se acomodan los dígitos del 1 al 9 sin repetir. Considere cada renglón como un número de 3 cifras, y llámele A a la suma de estos tres números. Ahora, considere cada columna como un número de tres cifras, y llámele B a la suma de estos tres números. ¿Puede encontrar alguna forma de acomodar los dígitos del 1 al 9 de manera que $A + B = 1997$?

1.2. Problemas de los últimos tres Concursos Nacionales de la OMM

Problema 1. (15a OMM) Encuentra todos los números de 7 dígitos que son múltiplos de 3 y de 7, y cada uno de cuyos dígitos es 3 ó 7.

Problema 2. (15a OMM) Se tienen algunas pelotas de colores (son por lo menos tres colores), y por lo menos tres cajas. Las pelotas se ponen en las cajas de manera que no quede vacía ninguna caja y que no haya tres pelotas de colores distintos que estén en tres cajas distintas. Prueba que hay una caja tal que todas las pelotas que están fuera de ella son del mismo color.

Problema 3. (15a OMM) En un cuadrilátero $ABCD$ inscrito en una circunferencia llamemos P al punto de intersección de las diagonales AC y BD, y sea M el punto medio de CD. La circunferencia que pasa por P y que es tangente a CD en M corta a BD y a AC en los puntos Q y R, respectivamente. Se toma un punto S sobre el segmento BD de tal manera que $BS = DQ$. Por S se traza una paralela a AB que corta a AC en un punto T. Prueba que $AT = RC$.

Problema 4. (15a OMM) Dados dos enteros positivos n y a se forma una lista de 2001 números como sigue: El primer número es a; a partir del segundo, cada número es el residuo que se obtiene al dividir el cuadrado del anterior entre n. A los números de la lista se les ponen los signos $+$ y $-$ alternadamente empezando con $+$. Los números con signo así obtenidos se suman y a esa suma se le llama *suma final para n y a*. ¿Para qué enteros $n \geq 5$ existe alguna a tal que $2 \leq a < \frac{n}{2}$ y la suma final para n y a es positiva?

Problema 5. (15a OMM) Sea ABC un triángulo tal que $AB < AC$ y el ángulo BAC es el doble del ángulo BCA. Sobre el lado AC se toma un punto D tal que $CD = AB$. Por el punto B se traza una recta l paralela a AC. La bisectriz exterior del ángulo en A intersecta a l en el punto M, y la paralela a AB por el punto C intersecta a l en el punto N. Prueba que $MD = ND$.

Problema 6. (15a OMM) Un coleccionista de monedas raras tiene monedas de denominaciones $1, 2, ..., n$ (tiene muchas monedas de cada denominación). Desea poner algunas de sus monedas en 5 cajas de manera que se cumplan las siguientes condiciones:

(a) En cada caja hay a lo más una moneda de cada denominación.

(b) Todas las cajas tienen el mismo número de monedas y la misma cantidad de dinero.

(c) Para cualesquiera dos cajas sucede que entre los dos tienen por lo menos una moneda de cada denominación.

(d) No existe una denominación tal que todas las cajas tengan una moneda de esa denominación.

¿Para qué valores de n puede el coleccionista hacer lo que se propone?

Problema 7. (16a OMM) En una cuadrícula de 32×32 se escriben los números del 1 al 1024 de izquierda a derecha, con los números del 1 al 32 en el primer renglón, los del 33 al 64 en el segundo, etc.
La cuadrícula se divide en cuatro cuadrículas de 16×16 que se cambian de lugar entre ellas como sigue:
Después, cada cuadrícula de 16×16 se divide en cuatro cuadrículas de 8×8 que se cambian de lugar del mismo modo; a su vez cada una de esas se divide y así sucesivamente hasta llegar a cuadrículas de 2×2 que se dividen en cuadros de 1×1, los cuales se cambian de lugar del mismo modo.
Al terminar estas operaciones, ¿qué números quedan en la diagonal que va de la esquina superior izquierda a la inferior derecha en la cuadrícula de 32×32?

Problema 8. (16a OMM) Sean $ABCD$ un paralelogramo y $\mathcal{K}$ la circunferencia circunscrita al triángulo ABD. Sean E y F las intersecciones de $\mathcal{K}$ con los lados (o sus prolongaciones) BC y CD respectivamente (E distinto de B y F distinto de D). Demuestra que el circuncentro del triángulo CEF está sobre $\mathcal{K}$.

Problema 9. (16a OMM) Sean n un entero positivo. ¿Tiene n^2 más divisores positivos de la forma $4k + 1$ o de la forma $4k - 1$?

Problema 10. (16a OMM) Una ficha de dominó tiene dos números (no necesariamente diferentes) entre 0 y 6. Las fichas se pueden voltear, es decir, $\boxed{4|5}$ es la misma ficha que $\boxed{5|4}$. Se quiere formar una hilera de fichas de dominó distintas de manera que en cada momento de la construcción de la hilera, la suma de todos los números de las fichas puestas hasta ese momento sea impar. Las fichas se pueden agregar de la manera usual a ambos extremos de la hilera, es decir, de manera que en cualesquiera dos fichas consecutivas aparezca el mismo número en los extremos que se juntan. Por ejemplo, se podría hacer la hilera: $\boxed{1|3}$ $\boxed{3|4}$ $\boxed{4|4}$, en la que se colocó primero la ficha del centro y luego la de la izquierda. Después de poner la primera ficha, la suma de todos los números es 7; después de poner la segunda, 11; después de la tercera, 19.
¿Cuál es la mayor cantidad de fichas que se pueden colocar en una hilera?
¿Cuántas hileras de esa longitud máxima se pueden construir?

Problema 11. (16a OMM) Tres enteros distintos forman una terna *compatible* si alguno de ellos, digamos n, cumple que cada uno de los otros dos es, o bien divisor, o bien múltiplo de n. Para cada terna compatible de números entre 1 y 2002 se calcula la suma de los tres números de la terna. ¿Cuál es la mayor suma obtenida? ¿Cuáles son las ternas en las que se obtiene la suma máxima?

Problema 12. (16a OMM) Sea $ABCD$ un cuadrilátero con AD paralelo a BC, los ángulos en A y B rectos y tal que el ángulo CMD es recto, donde M es el punto medio de AB. Sean K el pie de la perpendicular a CD que pasa por M, P el punto de intersección de AK con BD y Q el punto de intersección de BK con AC. Demuestra que el ángulo AKB es recto y que

$$\frac{KP}{PA} + \frac{KQ}{QB} = 1.$$

Problema 13. (17a OMM) Dado un número k de dos o más cifras, se forma otro entero m insertando un cero entre la cifra de las unidades y la de las decenas de k. Encuentra todos los números k para los cuales m resulta ser un múltiplo de k.

Problema 14. (17a OMM) Sean A, B y C tres puntos colineales con B entre A y C. Sea $\mathcal{Y}$ una circunferencia tangente a AC en B, y sean $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Z}$ las circunferencias de diámetros AB y BC, respectivamente. Sea P el otro punto (además de B) en el que se cortan las circunferencias $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$; sea Q el otro punto (además de B) en el que se cortan las circunferencias $\mathcal{Y}$ y $\mathcal{Z}$. Supón que la recta PQ corta a $\mathcal{X}$ en un punto R distinto de P, y que esa misma recta PQ corta a $\mathcal{Z}$ en un punto S ditinto de Q. Demuestra que concurren AR, CS y la tangente común a $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Z}$ por B.

Problema 15. (17a OMM) En una fiesta hay el mismo número n de muchachos que de muchachas. Supón que a cada muchacha le gustan a muchachos y que a cada muchacho le gustan b muchachas. ¿Para qué valores de a y b es correcto afirmar que forzosamente hay un muchacho y una muchacha que se gustan mutuamente?

Problema 16. (17a OMM) Sea $ABCD$ un trapecio con AB paralelo a DC. Se toman puntos P y Q sobre AB y CD respectivamente, tales que $\frac{AP}{PB} = \frac{DQ}{QC}$. Sea M la intersección de AQ con DP y sea N la intersección de PC con QB. Pruebe que la longitud de MN depende sólo de las longitudes de AB y DC, y calcula su valor.

Problema 17. (17a OMM) Se escriben en tarjetas todas las parejas de enteros (a, b) con $1 \leq a < b \leq 2003$. Dos personas juegan con las tarjetas como sigue: cada jugador en su turno elige (a, b) (que se retira del juego) y escribe el producto $a \cdot b$ en un pizarrón (ambos jugadores usan el mismo pizarrón). Pierde el jugador que ocasione que el máximo común divisor de los números escritos hasta ese momento sea 1. ¿Quién tiene estrategia ganadora? (Es decir, ¿cuál de los dos jugadores puede inventar un método con el cual asegura su triunfo?)

Problema 18. (17a OMM) Dado un entero n un *cambio sensato* consiste en sustituir n por $2n+1$ ó $3n+2$. Dos enteros positivos a y b se llaman *compatible* si existe un entero que se puede obtener haciendo uno o más cambios sensatos, tanto a partir de a, como a partir de b. Encuentra todos los enteros positivos compatibles con 2003 menores que 2003.

Capítulo 2

Olimpiadas Internacionales en las que participa México

2.1. V Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe

Problema 1. Dos jugadores A y B, juegan por turnos el siguiente juego: Se tiene un montón de 2003 piedras. En su primer turno, A escoge un divisor de 2003, y retira ese número de piedras del montón inicial. Posteriormente, B escoge un divisor del número de piedras restantes, y retira ese número de piedras del nuevo montón, y siguen así sucesivamente. Pierde el jugador que retira la última piedra. Demostrar que uno de los dos jugadores tiene una *estrategia ganadora* y describir dicha estrategia.

Nota: Se entiende por *estrategia ganadora* un método de juego que le garantiza la victoria al que lo aplica sin importar lo que haga su oponente.

Problema 2. Sea S una circunferencia y AB un diámetro de ella. Sea t la recta tangente a S en B y considere dos puntos C, D en t tales que B esté entre C y D. Sean E y F las intersecciones de S en AC y AD, y sean G y H las intersecciones de S con CF y DE. Demostrar que $AH = AG$.

Problema 3. Sean a, b enteros positivos, con $a > 1$ y $b > 2$. Demostrar que $a^b + 1 \geq b(a+1)$ y determinar cuándo se tiene la igualdad.

Problema 4. Sean S_1 y S_2 dos circunferencias que se intersectan en dos puntos distintos P y Q. Sean l_1 y l_2 dos rectas paralelas, tales que:
(i) l_1 pasa por el punto P e intersecta a S_1 en un punto A_1 distinto de P y a S_1 en un punto A_2 distinto de P.
(ii) l_2 pasa por el punto Q e intersecta a S_1 en un punto B_1 distinto de Q y a S_2 en un punto B_2 distinto de Q.
Demostrar que los triángulos A_1QA_2 y B_1QB_2 tienen igual perímetro.

Problema 5. Un tablero cuadrado de $8\,cm$ de lado se divide en 64 casillas cuadradas de $1\,cm$ de lado cada una. Cada casilla se puede pintar de blanco o de negro. Encontrar el número total de maneras de colorear el tablero de modo tal que cada cuadrado de $2\,cm$ de lado formado por cuatro casillas con un vértice común, contenga dos casillas blancas y dos negras.

Problema 6. Digamos que un entero positivo es *tico* si la suma de sus dígitos (en base 10) es múltiplo de 2003. paralelas, tales que:
(i) Demostrar que existe un entero positivo N tal que sus primeros 2003 múltiplos $N, 2N, 3N, \ldots, 2003N$, son todos *ticos*.
(ii) ¿Existe algún entero positivo N tal que todos sus múltiplos sean *ticos*?

2.2. XVIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

Problema 1. (a) Se tienen dos sucesiones, cada una de 2003 enteros consecutivos, y un tablero de 2 filas y 2003 columnas

		$\cdots \quad \cdots$		
		$\cdots \quad \cdots$		

Decida si siempre es posible distribuir los números de la primera sucesión en la primera fila y los de la segunda sucesión en la segunda fila, de tal manera que los resultados obtenidos al sumar los dos números de cada columna formen una nueva sucesión de 2003 números consecutivos.

(b) ¿Y si se reemplaza 2003 por 2004?
Tanto en $a)$ como en $b)$, si la respuesta es afirmativa, explique cómo ditribuiría los números, y si es negativa, justifique el porqué.

Problema 2. Sean C y D dos puntos de la semicircunferencia de diámetro AB tales que B y C están en semiplanos distintos respecto de la recta AD. Denotemos M, N y P los puntos medios de AC, DB y CD, respectivamente. Sean O_A y O_B los circuncentros de los triángulos ACP y BDP. Demuestre que las rectas O_AO_B y MN son papalelas.

Problema 3. Pablo estaba copiando el siguiente problema:
Considere todas las sucesiones de 2004 números reales $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{2003})$, *tales que*

$$\begin{array}{rcl} x_0 & = & 1, \\ 0 \leq & x_1 & \leq 2x_0, \\ 0 \leq & x_2 & \leq 2x_1, \\ & \vdots & \\ 0 \leq & x_{2003} & \leq 2x_{2002}. \end{array}$$

Entre todas estas sucesiones, determine aquella para la cual la siguiente expresión toma su mayor valor: $S = \ldots$.
Cuando Pablo iba a copiar la expresión de S le borraron la pizarra. Lo único que pudo recordar es que S era de la forma

$$S = \pm x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_{2002} + x_{2003},$$

donde el último término, x_{2003}, tenía coeficiente $+1$, y los anteriores tenían coeficientes $+1$ ó -1. Demuestre que Pablo, a pesar de no tener el enunciado completo, puede determinar con certeza la solución del problema.

Problema 4. Sea $M = \{1, 2, \ldots, 49\}$ el conjunto de los primeros 49 enteros positivos. Determine el máximo entero k tal que el conjunto M tiene un subconjunto de k elementos en el que no hay 6 números consecutivos. Para ese valor máximo de k, halle la cantidad de subconjuntos de M, de k elementos, que tienen la propiedad mencionada.

Problema 5. En el cuadrado $ABCD$, sean P y Q puntos pertenecientes a los lados BC y CD respectivamente, distintos de los extremos, tales que $BP = CQ$. Se consideran puntos X e Y, $X \neq Y$, pertenecientes a los segmentos AP y AQ, respectivamente. Demuestre que, cualesquiera sean X e Y, existe un triángulo cuyos lados tienen las longitudes de los segmentos BX, XY y DY.

Problema 6. Se definen las suceisones $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ por:

$$a_0 = 1 \qquad b_0 = 4 \qquad \text{y}$$
$$a_{n+1} = a_n^{2001} + b_n, \qquad b_{n+1} = b_n^{2001} + a_n, \quad \text{para} \quad n \geq 0.$$

Demuestre que 2003 no divide a ninguno de los términos de estas sucesiones.

2.3. XLIV Olimpiada Internacional de Matemáticas

Problema 1. Sea A un subconjunto del conjunto $S = \{1, 2, \ldots, 1000000\}$ que contiene exactamente 101 elementos. Demuestra que existen números $t_1, t_2, \ldots,$ t_{100} en S tal que los conjuntos

$$A_i = \{x + t_j \,/\, x \in A\} \quad \text{para} \quad j = 1, 2, \ldots, 100$$

son ajenos dos a dos.

Problema 2. Encuentra todas las parejas de enteros positivos (a, b) tales que

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^2 + 1}$$

sea un entero positivo.

Problema 3. Considera un hexágono convexo en el cual cualesquiera dos lados opuestos tienen la siguiente propiedad: la distancia entre sus puntos medios es $\frac{\sqrt{3}}{2}$ veces la suma de sus longitudes. Demuestra que todos los ángulos del hexágono son iguales.
Un hexágono convexo $ABCDEF$ tiene tres pares de lados opuestos: AB y DE, BC y EF, CD y FA.

Problema 4. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico. Sean P, Q y R los pies de las perpendiculares desde D a las rectas BC, CA y AB, respectivamente. Demuestra que $PQ = QR$ si y sólo si la bisectriz del $\angle ABC$ y $\angle ADC$ se intersectan en AC.

Problema 5. Sea n un entero positivo y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reales tales que $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$.
(a) Demuestra que

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j|\right)^2 \leq \frac{2(n^2-1)}{3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j)^2.$$

(b) Demuestra que la igualdad es válida si y sólo si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es una progresión aritmética.

Problema 6. Sea p un número primo. Demuestra que existe un número primo q tal que para todo entero n, el número $n^p - p$ no es divisible entre q.

Capítulo 3

Soluciones de los Problemas

3.1. Soluciones de los Problemas de Práctica

Solución del problema 1. (i) Sean $d_i = a_{i+1} - a_i$ las diferencias, $i = 1, ..., 108$. Por un lado tenemos que: $d_1 + d_2 + \cdots + d_{108} = a_{109} - a_1 \leq 1998 - 1 = 1997$. Ahora, si $d'_1 \leq d'_2 \leq \cdots \leq d'_{108}$ son las diferencias ordenadas, como d'_1, d'_2, d'_3 son al menos 1; d'_4, d'_5, d'_6 son al menos 2;...; $d'_{106}, d'_{107}, d'_{108}$ son al menos 36, tenemos que: $d_1 + d_2 + \cdots + d_{108} = d'_1 + d'_2 + \cdots + d'_{108} \geq 3\,(1 + 2 + \cdots + 36) = 1998$, lo que da una contradicción.
(ii) Considere: $a_1 = 1$ y $a_i = a_1 + d_1 + \cdots + d_{i-1}$, donde $d_1 = d_2 = d_3 = 1$, $d_4 = d_5 = d_6 = 2, ..., d_{106} = d_{107} = d_{108} = 36$.

Solución del problema 2. Primero veamos que n es par. Si n fuera impar entonces cada a_i deberá ser impar, pero la suma de un número impar de impares no puede ser igual a cero. Luego n es par.
Ahora veamos que n es múltiplo de 4. Si n fuera de la forma $n = 4m + 2 = 2(2m + 1)$, entonces alguna a_i es 2 y las restantes $n - 1$ son impares, luego, la suma de las a_i impares, es impar (pues $n - 1$ es impar) y si agregamos el 2 tenemos que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ es impar, luego, no podrá ser 0.
Por tanto n debe ser de la forma $4m$.

Solución del problema 3. Hay 105. Primero observemos que: $111, 222, 333$, ..., 999 son equilibrados. Notemos también que si abc es un número equilibrado entonces también lo son: acb, bac, bca, cab y cba, además si dos cifras de un número equilibrado son iguales la tercera cifra es igual a estas, por lo que los números equilibrados de cifras diferentes aparecen de 6 en 6. Finalmente, hay que tener en cuenta que si abc es equilibrado con $c = \frac{a+b}{2}$ entonces a y b deben tener la misma paridad.

Construimos ahora los números equilibrados siguiendo un orden, primero los que tienen la primera cifra igual a 1, después cuando es 2, etc.

132, 153, 174, 195

243, 264, 285,

354, 375, 396,

465, 486,

576, 597,

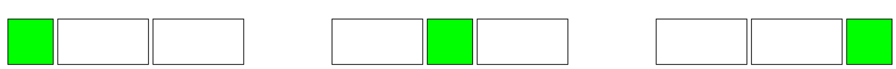
687,

798.

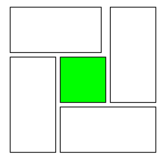
Por la observación anterior estos 16 números equilibrados, generan a $16 \cdot 6 = 96$ números y con los 9 primeros, dan los 105 números equilibrados.

Solución del problema 4. Coloreamos el tablero con dos colores: blanco y negro en forma alternada, de manera que queden 13 negros y 12 blancos. Como una pieza de 2×1 cubre un cuadro blanco y uno negro, al cubrir el tablero con 12 de estas piezas nos quedará sin cubrir un cuadro negro. Veamos que cualquiera de ellos puede quedar sin cubrir.

Dos renglones contiguos siempre se pueden cubrir, así el cuadrado de 4 renglones y 5 columnas que se obtiene al quitar el primer renglón se puede cubrir y en el primer renglón se pueden dejar de cubrir cualquiera de los 3 cuadros negros. Este método funciona también para el tercer y quinto renglón.

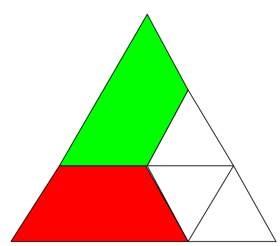


Fijémonos en el cuadro de 3×3 que está en la esquina superior izquierda, éste se puede cubrir dejando el centro descubierto de la siguiente manera:



Como el resto del cuadrado de 5×5 se cubre, entonces tenemos manera de cubrir el de 5×5 dejando el cuadrado negro central del subcuadrado de 3×3 que seleccionamos. En forma análoga, se procede para los cuadros negros restantes.

Solución del problema 5. Los trapecios de lados 1, 1, 1 y 2 son el resultado de "pegar" 3 triángulos equiláteros de lado 1 formando la mitad de un hexágono regular. Un triángulo equilátero de lado n se divide en n^2 triangulitos de lado 1. Por lo tanto, para que un triángulo de lado n se pueda dividir en trapecios como los mencionados, necesariamente n^2 deberá ser múltiplo de 3, es decir, n debe ser múltiplo de 3.
Esto también es suficiente: si n es múltiplo de 3, el triángulo equilátero de lado n puede dividirse en triángulos equiláteros de lado 3 y basta probar que uno de éstos puede dividirse en trapecios de lados 1, 1, 1 y 2. La división necesaria se muestra en la figura:



Solución del problema 6. Los icosaedros tienen 12 vértices, por lo que hay $\binom{12}{2}=66$ segmentos que unen pares de vértices. Si a esos 66 segmentos les quitamos las aristas, tendremos el número de diagonales. ¿Cuántas aristas tiene un icosaedro regular? Veamos: tiene 20 caras de 3 aristas cada una y cada arista está en dos caras. Por lo tanto, hay $\frac{20\cdot 3}{2}=30$ aristas. Entonces, hay $66-30=36$ diagonales.
Segunda Solución. Usaremos la fórmula de Euler que relaciona el número de aristas A, el número de vértices V y el número de caras C de un poliedro: $V-A+C=2$.

Como en el icosaedro las caras son triángulos tenemos que $2A = 3C$ ya que cada cara tiene tres aristas y una arista es compartida por dos caras, luego hay 30 aristas. Por la fórmula de Euler el número de vértices es $V = A - C + 2 = 30 - 20 + 2 = 12$ y entonces se tiene que $5V = 2A$, es decir, cada vértice tiene 5 vértices adyacentes. Al unir cada vértice con los 11 vértices restantes y al restar sus 5 vértices adyacentes, tenemos que de cada vértice salen 6 diagonales luego el número de diagonales es $\frac{12 \cdot 6}{2} = 36$.

Solución del problema 7. No es difícil ver que si el número tiene 90 cifras entonces tiene 12 cifras iguales a a y 78 cifras 2. Como un número es divisible entre 9 si y sólo si la suma de sus cifras es divisible entre 9 y como la suma de las cifras 2 es $2 \cdot 78$ que es divisible entre 9, bastará ver cuando $12a$ es divisible entre 9. Como $12a$ tiene un factor 3, será suficiente que a tenga un factor 3, luego los valores de a son $0, 3, 6$ y 9.

Solución del problema 8. Como:

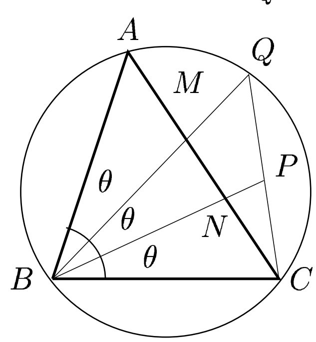
$$\frac{a + b^{-1}}{a^{-1} + b} = \frac{a + \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} + b} = \frac{\left(\frac{ab+1}{b}\right)}{\left(\frac{ab+1}{a}\right)} = \frac{a}{b},$$

debemos encontrar los a y b tales que $\frac{a}{b} = 13$ y $a + b \leq 80$. Como $\frac{a}{b} = 13$, $a = 13b$, entonces, $a + b = 14b \leq 80$. Por lo tanto, b es a lo más 5. Las parejas (a, b) que cumplen son $(13, 1), (26, 2), (39, 3), (52, 4), (65, 5)$.

Solución del problema 9. Por el Teorema de la bisectriz:

$$\frac{MN}{AM} = \frac{BN}{AB} \quad \text{y} \quad \frac{BC}{QB} = \frac{PC}{QP}$$

Los triángulos ABN y QBC, son semejantes ya que $\angle BAN = \angle BQC$ y $\angle ABN = \angle QBC = 2\theta$, por lo tanto, $\frac{BN}{AB} = \frac{BC}{QB}$. Luego $\frac{MN}{AM} = \frac{PC}{QP}$.



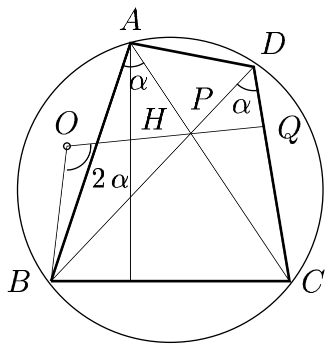
Al sumar 1 de ambos lados de esta última igualdad obtenemos:

$$\frac{AN}{AM} = \frac{QC}{QP}$$

Por tanto,

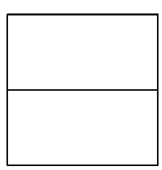
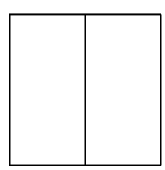
$$\frac{AM}{AN} + \frac{CP}{CQ} = \frac{QP}{QC} + \frac{CP}{CQ} = \frac{QC}{QC} = 1.$$

Solución del problema 10. Sea Q la intersección de OP con CD. Probar que O, P y H son colineales es equivalente a probar que $PQ \perp CD$. Sea $\alpha = \angle BAC = \angle BDC$. Como O es el circuncentro de ABP, $\angle BOP = 2\alpha$.

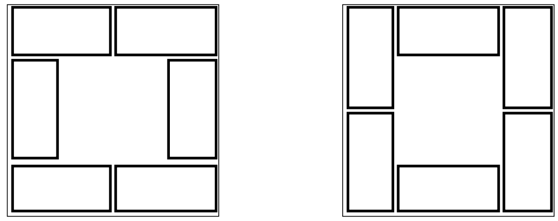


Como el triángulo BOP es isósceles, $\angle OPB = 90^o - \frac{1}{2}\angle BOP = 90^o - \alpha$. Entonces $\angle DPQ + \angle PDQ = \angle OPB + \alpha = (90^o - \alpha) + \alpha = 90^o$. Por lo tanto, $\angle PQD = 90^o$, es decir, $PQ \perp CD$.

Solución del problema 11. Fijémonos en la forma de llenar el cuadrito central de 2×2, cada una de las formas de llenarlo dará una forma de llenar toda la cuadrícula.
El cuadrado central se puede llenar con dos fichas de dos maneras:

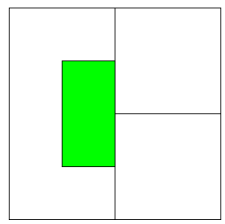

y


Para cada una de estas formas hay 2 maneras de terminar el llenado de la cuadrícula:



Así hay 4 maneras de llenar la cuadrícula, si iniciamos llenando primero el cuadrado central de 2×2.

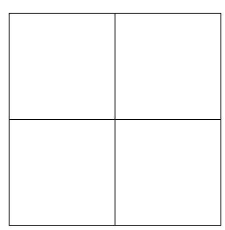
Si en el cuadrado central de 2×2 hay solo una ficha completa dentro de él, por ejemplo así:



Tenemos que los dos cuadrados de 2×2 de la derecha tanto el inferior como el superior se pueden llenar cada uno de 2 maneras y el lado izquierdo de la cuadrícula que falta llenar, se llena de manera forzada.

Luego, hay 4 maneras de llenar la cuadrícula en este caso y si giramos la cuadrícula para considerar los 4 posibles casos de la ficha de 2×1 que se coloca en el cuadro central, tenemos en total en este caso 16 maneras de llenarla.

Finalmente veamos el caso donde no hay una ficha de 2×1, dentro del cuadrado central. Dividimos la cuadrícula en 4 cuadros de 2×2.



Cada uno de estos cuadrados de 2×2 se puede llenar de 2 maneras y entonces en este caso hay 16 maneras de llenar la cuadrícula.

Resumiendo tenemos que hay en total 36 formas de llenar la cuadrícula.

Solución del problema 12. El reo número 10, que es el primero en hablar, ve 9 sombreros de dos colores posibles. De un color debe haber un número par y del otro uno impar. Los reos se pueden poner de acuerdo para que el reo número 10 diga el color del que ve un número par, de esta forma el reo número 9 sabrá de que color es su sombrero, ya que cuenta el número de sombreros que ve del color que dijo su compañero: si sigue siendo par, su sombrero es del otro color, y si es impar, su sombrero es de ese color.
Así cada uno de los siguientes reos cuenta el número de sombreros que ve del color que dijo el reo número 10 y a ese número le suma la cantidad de veces que sus otros compañeros han dicho el color, si el número que le da es par, entonces su sombrero es del otro color y si es impar, su sombrero es de ese color. De esta forma el único que quizá no se salva es el reo número 10.

Solución del problema 13. Supongamos que 1 es rojo y que n es negro. Para $n = 2$ es claro el resultado, supongamos el resultado cierto para $k < n$. Sean a el menor entero coloreado de negro y b el mayor entero coloreado de rojo de entre $\{1, 2, ..., n\}$, así $1, 2, ..., a - 1$ son rojos y $b + 1, b + 2, ..., n$ son negros. Ahora, fijémonos en el conjunto $\{a, a + 1, ..., b\}$ tenemos que inicia con a coloreado de negro y termina en b que es de color rojo, luego, por la hipótesis de inducción el número de parejas consecutivas de diferente color en este conjunto es impar. Sumando los dos cambios de color que hay entre $a - 1$ y a y entre b y $b + 1$, el total también es impar.

Solución del problema 14. Supongamos que el cuadro 1 se llena con una ficha de dominó vertical (ver figura).

1	2						
	3	4					
		5	6				
			7	8			
				9	10		
					11	12	
						13	14

Si 2 también se llena con una ficha vertical, terminamos. Supongamos entonces que 2 se cubre con una ficha horizontal. Ahora, si 3 se cubre con una horizontal acabamos; supongamos que se cubre con una vertical. Del mismo modo vemos que $1,3,5,7,9,11$ y 13 se deben llenar con fichas verticales y $2,4,6,8,10,12$ con fichas horizontales. Esto obliga a cubrir 14 con una ficha vertical formando un cuadrado de 2×2 con la ficha que cubre 13. Por lo tanto, siempre hay dos fichas que forman un cuadro de 2×2.

Segunda Solución. Supongamos que no hay 2 fichas que formen un cuadrado de 2×2. Contaremos el número de parejas (C,D) en el tablero donde C es un cuadro de 2×2 y D es una ficha de dominó contenida completamente en C. Como cada cuadro de 2×2 contiene a lo más una ficha, el número de parejas es a lo más 49, el número de cuadros de 2×2 en un tablero de 8×8. Por otra parte, cada ficha que no esté contenida totalmente en el marco de ancho 1, está contenida en dos cuadrados de 2×2. Por lo tanto, si hay m fichas en el marco, hay $m+2(32-m)=64-m$ parejas de las que contamos. Entonces, $64-m$ es menor o igual que 49 y por lo tanto $m\geq 15$. Pero no puede haber 15 fichas en el marco, pues el marco tiene sólo 28 cuadritos. Esta contradicción prueba que debe haber 2 fichas en un cuadro de 2×2.

Solución del problema 15. Hay tres tipos de paralelepípedos: (i) paralelepípedos con todas las aristas iguales (cubos), de éstos hay 10, que correspondende a la manera de elegir la longitud de la arista entre los 10 números. (ii) paralelepípedos con dos longitudes de aristas iguales y una distinta, hay 10 formas de elegir la longitud de las aristas iguales y 9 formas de elegir la otra longitud, por lo que hay en éste caso $10\cdot 9=90$ paralelepípedos distintos. (iii) paralelepípedos con tres longitudes de aristas distintas, aquí se deben escoger las tres longitudes distintas entre las 10 posibles estos se hace de $\binom{10}{3}=120$ maneras. Por lo que en total hay $10+90+120=220$ paralelepípedos distintos.

Segunda Solución. Ordenando los lados del paralelepípedo de menor a mayor evitamos repeticiones. Entonces, el número de paralelepípedos rectangulares *distintos* con lados enteros entre 1 y 10 es igual al número de tercias de enteros (a,b,c) que satisfacen $1\leq a\leq b\leq c\leq 10$. Afirmamos que el número de tercias es $\binom{12}{3}$, el número de subconjuntos de 3 elementos del conjunto $1,2,3,\ldots,12$. De la condición que deben cumplir las tercias se obtiene $1\leq a<b+1<c+2\leq 12$, por lo que a, $b+1$ y $c+2$ son números del 1 al 12 diferentes entre sí. Entonces, a cada tercia (a,b,c) le podemos hacer corresponder el conjunto $\{a,\, b+1,\, c+2\}$. Y viceversa, para obtener una de las tercias a partir de cualquier subconjunto de 3 elementos de $\{1,2,3,\ldots,12\}$, basta con ordenar los elementos del conjunto, digamos $x<y<z$ y formar la tercia $(x,y-1,z-2)$. Como x, y y z están entre

1 y 12 y se cumple que $x < y < z$, tenemos que $1 \leq x \leq y-1 \leq z-2 \leq 10$, de modo que la tercia propuesta efectivamente cumple la condición requerida. Esta correspondencia muestra que el número de tercias que cumplen la condición (que es igual al de paralelepípedos buscados) es igual al número de subconjuntos de $\{1, 2, 3, \ldots, 12\}$ de 3 elementos, es decir, $\binom{12}{3}$.

Solución del problema 16. Sí es posible. Para ver esto, sean $\sum c$, $\sum v$ y $\sum a$ las sumas de los números asignados a las caras, vértices y aristas, respectivamente. Como cada cara está formada por tres aristas, tenemos que:

$$2\sum a = 3\sum c \tag{3.1}$$

y como cada vértice es común a tres aristas, tenemos que:

$$2\sum a = 3\sum v \tag{3.2}$$

Además,

$$\sum c + \sum v + \sum a = 1 + 2 + \cdots + 14 = 105. \tag{3.3}$$

Resolviendo el sistema formado por (3.1), (3.2) y (3.3) tenemos que:

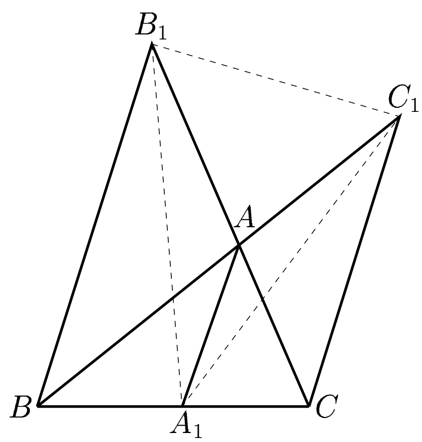
$$\sum c = \sum v = 30 \text{ y } \sum a = 45.$$

Para que el número asignado a una arista sea entero, debemos tener que los números asignados a las caras adyacentes a la arista deben ser de la misma paridad y los números asignados a los vértices que determina la arista también deben ser de la misma paridad. Pero si un vértice es par (impar) lo serán también los demás vértices, esto mismo sucede con las caras.
Los conjuntos de cuatro números con la misma paridad, cuya suma sea 30 y sean elementos de $\{1, 2, 3, ..., 14\}$, son los siguientes ocho conjuntos:
$\{1, 5, 11, 13\}$, $\{1, 7, 9, 13\}$, $\{3, 5, 9, 13\}$, $\{3, 7, 9, 11\}$, $\{2, 4, 10, 14\}$, $\{2, 6, 8, 14\}$, $\{2, 6, 10, 12\}$, $\{4, 6, 8, 12\}$.
Uno de estos conjuntos debe ser usado para numerar las caras y otro para numerar los vértices. Puesto que ningún promedio debe ser elemento del conjunto, los únicos conjuntos que satisfacen (después de promediar por parejas los números de cada conjunto de todas las maneras posibles) son: $\{1, 5, 11, 13\}$ y $\{2, 4, 10, 14\}$. Ambos dan el mismo conjunto para numerar las aristas. A saber: $\{3, 6, 7, 8, 9, 12\}$.

Así, tenemos dos soluciones dependiendo de qué conjunto se utilice para numerar las caras y cual para numerar los vértices.
Notemos que cada solución es el dual de la otra, ya que en la primera los números asignados a las caras son los números asignados a los vértices de la segunda y viceversa.

Solución del problema 17. Supongamos que los números primos son: $p, p+6, p+12, p+18, p+24$ al tomar congruencias módulo 5 tenemos que estos números son congruentes a $p, p+1, p+2, p+3, p+4$ respectivamente, pero entre cinco números consecutivos siempre hay uno que es divisible entre 5 y como p debe ser primo no hay otra opción más que $p = 5$, y los números primos son $5, 11, 17, 23$ y 29.

Solución del problema 18. El triángulo $A_1B_1C_1$ se divide en los triángulos AA_1B_1, AA_1C_1 y AB_1C_1. Como BB_1 es paralela a AA_1, $(AA_1B_1) = (AA_1B)$ (si pensamos que la base de ambos triángulos es AA_1, tiene también la misma altura: la distancia de AA_1 a BB_1).



Análogamente, $(AA_1C_1) = (AA_1C)$. Por lo tanto, $(AA_1B_1) + (AA_1C_1) = (AA_1B) + (AA_1C) = (ABC)$. Veamos ahora el triángulo AB_1C_1: como BB_1 es paralela a CC_1, $(BB_1C_1) = (BB_1C)$. Restando (BB_1A) a cada lado de esa igualdad se obtiene que $(AB_1C_1) = (ABC)$. Por lo tanto, $(A_1B_1C_1) = (AB_1C_1) + ((AA_1B_1) + (AA_1C_1)) = 2(ABC) = 3998$.

Solución del problema 19. (i) Si n es impar, tomamos $a = 0$, $b = \frac{n+1}{2}$ y $c = \frac{n-1}{2}$. Si n es múltiplo de cuatro, tomamos $a = 0$, $b = \frac{n+4}{4}$ y $c = \frac{n-4}{4}$. Finalmente, si n es de la forma $4k+2$, tomamos $a = 1$, $b = \frac{n}{2}$ y $c = \frac{n-2}{2}$.

(ii) Probaremos primero que $n = a^2 + b^2 + c^2$ no tiene soluciones enteras si n es de la forma $4^t(8k+7)$. Un cuadrado perfecto es congruente con 0, 1 ó 4 módulo 8. Haciendo todas las posible sumas módulo 8 de tres $0'$s, $1'$s y $4'$s, vemos que $a^2 + b^2 + c^2$ nunca es congruente con 7 módulo 8. También podemos comprobar que no es múltiplo de 4 (o sea, congruente con 0 ó 4 módulo 8) a menos que a, b y c sean los tres pares. Por lo tanto, si $a^2 + b^2 + c^2 = 4^t(8k + 7)$, no podemos tener $t = 0$. Pero si $t \geq 1$, a, b y c deben ser pares, digamos $2a_1$, $2b_1$ y $2c_1$. Sustituyendo hallamos que $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 4^{t-1}(8k+7)$, que es la misma ecuación con t reducida en 1. Repetiendo el argumento suficientes veces llegamos a $t = 0$, lo cual es absurdo. Por lo tanto, $n = a^2 + b^2 + c^2$ no tiene soluciones si n es de la forma $4^t(8k + 7)$.

Contemos cuantas $n < 1999$ son de esa forma:

Con $t = 0$ hay 249, $k = 0, 1, \ldots, 248$.

Con $t = 1$ hay 62, $k = 0, 1, \ldots, 61$.

Con $t = 2$ hay 15, $k = 0, 1, \ldots, 14$.

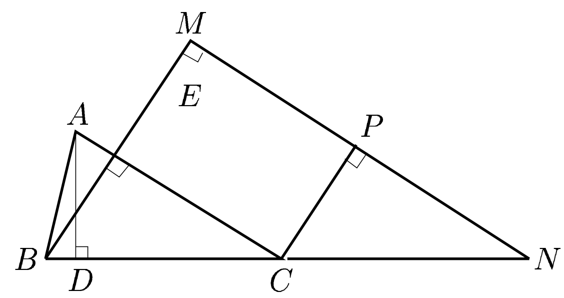
Con $t = 3$ hay 4, $k = 0, 1, 2, 3$.

Con $t = 4$ hay 1, $k = 0$.

En total son 331 números de esa forma, por lo que hay a lo más $1998-331 = 1667$ enteros menores que 1999 que son suma de tres cuadrados.

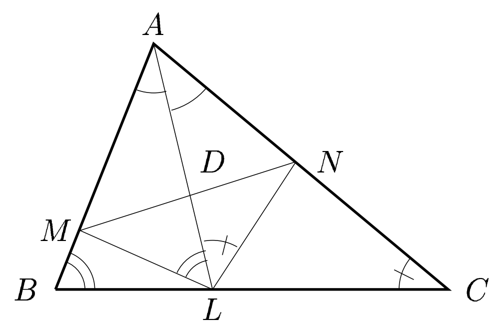
Solución del problema 20. Ponemos en cada vértice indicado con A, $\sqrt{2}$ y en cada vértice indicado con B, $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ahora, sobre cada lado, el número escrito es el producto de los números puestos en los vértices. El producto de los números escritos sobre los lados es el cuadrado del producto de los números asignados a los vértices, pues cada vértice pertenece a dos lados. Por lo tanto, el producto buscado es $\left(\left(\sqrt{2}\right)^a \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^b\right)^2 = 2^{a-b}$.

Solución del problema 21. Como MN y AC son perpendiculares a MB, se tiene que $MN \parallel AC$. Sea P en MN tal que $CP \perp MN$, entonces $PMEC$ es un rectángulo, $PC = ME = AD$ y $\angle MPC = \pi/2 = \angle ECP$.



Como $PN \| CE$ se tiene que $\angle DCE = \angle CNP$, y entonces los triángulos PNC y DCA tienen todos sus ángulos iguales y un lado igual, por tanto son congruentes y entonces $NC = CA$. Luego el triángulo NCA es isósceles.

Solución del problema 22. Los triángulos ALN y ACL son semejantes, por lo que: $AL^2 = AN \cdot AC$.



También ALM y ABL son semejantes por lo que: $AL^2 = AM \cdot AB$. Luego

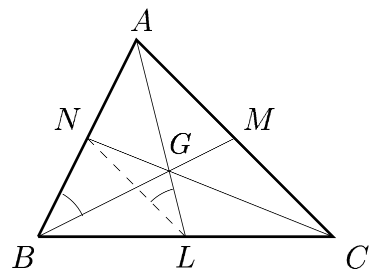
$$AL^4 = AB \cdot AC \cdot AN \cdot AM. \tag{3.4}$$

Por otro lado el cuadrilátero $AMLN$ es cíclico ya que $\angle MAN + \angle MLN = 180°$, luego los ángulos $\angle AMN$ y $\angle ALN$ son iguales y entonces son semejantes los triángulos ADM y ANL, por lo que:

$$AD \cdot AL = AN \cdot AM. \tag{3.5}$$

De las ecuaciones (3.4) y (3.5) tenemos que $AL^3 = AB \cdot AC \cdot AD$.

Solución del problema 23. Sea G el centroide, es decir, el punto de intersección de las medianas AL, BM y CN.



Como LN es paralela a CA, tenemos que $\angle LAC = \angle ALN$.
Luego, $\angle MBA = \angle LAC = \angle ALN \Leftrightarrow BLGN$ es cíclico $\Leftrightarrow \angle CNA = \angle ALB$.

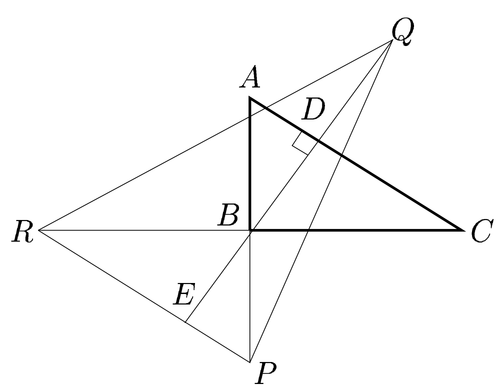
Solución del problema 24. Observemos primero que

$$\frac{a^2}{a+b} = \frac{a(a+b)-ab}{a+b} = a - \frac{ab}{a+b}.$$

Como $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, tenemos que $\frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4}$, luego $-\frac{ab}{a+b} \geq -\frac{a+b}{4}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} &= \left(a - \frac{ab}{a+b}\right) + \left(b - \frac{bc}{b+c}\right) + \left(c - \frac{ca}{c+a}\right) \\
&\geq (a+b+c) - \left(\frac{a+b}{4} + \frac{b+c}{4} + \frac{c+a}{4}\right) \\
&= \frac{a+b+c}{2} = 1.
\end{aligned}$$

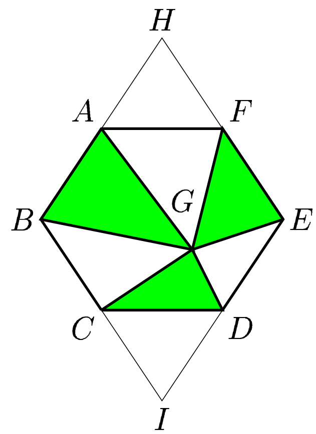
Solución del problema 25. Sea $\angle ABC$ el ángulo recto. Por construcción $BR = BC$ y $BP = AB$, además como $\angle ABC = \pi/2 = \angle RBP$, los triángulos ABC y PBR son congruentes y de lados paralelos, por lo que AC y PR son iguales y paralelos. Como BQ y AC son perpendiculares, resulta que BQ y RP son perpendiculares.



Sean D y E las intersecciones de BQ con AC y RP, respectivamente. QE es altura del triángulo PQR. Por construcción $2\,BE = BQ$. Calculemos el área del triángulo PQR: $(PQR) = \frac{1}{2}RP \cdot QE = \frac{3}{2}AC \cdot BD = 3\,(ABC)$. Entonces

$$\frac{(ABC)}{(PQR)} = \frac{1}{3}.$$

Solución del problema 26. Consideremos el hexágono $ABCDEF$ coloreado como indica el problema.

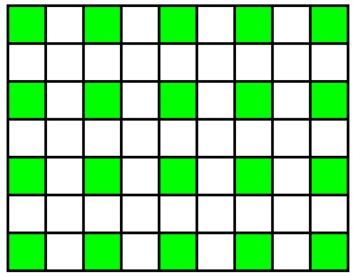


Sobre los lados AF y CD construimos triángulos equiláteros AFH y CID respectivamente, como se ve en la figura. En el triángulo BGH tenemos que $(AHG) = (BAG)$ por tener la misma base y la misma altura. Análogamente, $(CBG) = (CIG)$, $(DIG) = (EDG)$ y $(FEG) = (HFG)$. Luego, $(AHFG) + (EDG) + (CBG) = (CGDI) + (BAG) + (FEG)$.
Si restamos de esta ecuación las áreas que no interesan (los triángulos equiláteros que construimos al principio), tenemos que:

$$(AHFG) - (AFH) + (EDG) + (CBG) = (CGDI) - (CID) + (BAG) + (FEG),$$

De donde, $(AFG) + (EDG) + (CBG) = (DCG) + (BAG) + (FEG)$.

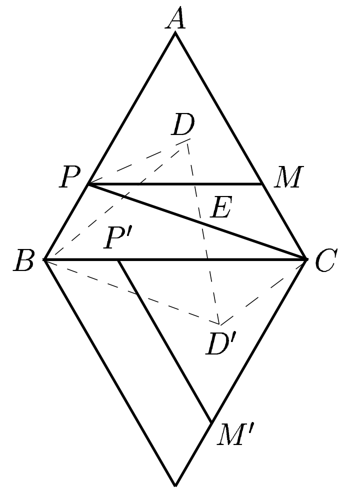
Solución del problema 27. La estrategia que deberá seguir el primer jugador es repetir la última jugada del segundo jugador.
Para explicar esto, sólo basta colorear el tablero de la siguiente manera:



Así, con la estrategia descrita, como el primer jugador siempre comienza en una casilla coloreada, (por la paridad del tablero) podemos asegurar que siempre llegará en sus turnos a una casilla de las que quedaron coloreadas, y que llegará primero a la casilla superior derecha del tablero, puesto que está coloreada también. El segundo jugador solamente podrá llegar en sus turnos a las casillas blancas, jamás podrá llegar a las casillas coloreadas.

Solución del problema 28. Sea n, $n+1,\ldots,n+9$ diez enteros consecutivos. Si dos de ellos, $n+i$, $n+j$ $(0\leq i<j\leq 10)$, tiene divisor primo p en común, entonces $p|(n+j)-(n+i)=j-i$. Ahora bien, $j-i$ está entre 1 y 8, de modo que p sólo puede ser 2, 3, 5 ó 7. Por lo tanto, si $(n+i)$ no es múltiplo de 2, 3, 5 ó 7, $(n+i)$ será primo relativo con los otros nueve enteros consecutivos. Entonces basta para cada n dar una i, $0\leq i<10$, tal que $(n+i)$ no sea múltiplo de 2, 3, 5 ó 7. Para eso sólo necesitamos tomar en cuenta el $n=0,1,2,3,\ldots,209$. Si n es un primo mayor que 7, podemos tomar $i=0$. Eso nos da una i para $n=11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97,101,$ $103,107,109,113,127,131,137,139,149,151,157,163,167,173,179,181,191,$ $193,197199$. Si $i=0$ funciona para $n=m$, entonces $i=k$ funciona para $n=m-k$ con $0<k<10$, por eso, donde en la lista anterior los "huecos"son de longitud 10 o menos podemos hallar una i apropiada para el "hueco" n. Hay sólo 3 "huecos"de longitud mayor que 10: del principio al 11, del 113 al 127, del 199 al final. Los podemos llenar notando que $i=0$ funciona también para $n=1,121,209$. Esto concluye la prueba.

Solución del problema 29. Cada punto X del plano lo giramos 60° alrededor de B (en el sentido de las manecillas del reloj) para obtener X', por ejemplo, $C=A'$.



Por la construcción BDD' es equilátero. Probaremos que E es el punto medio de DD', de modo que los ángulos del triángulo BDE son $30°$, $60°$ y $90°$.
Si probamos que $PDCD'$ es un paralelogramo habremos terminado (porque las diagonales de un paralelogramo se bisecan). $P'D'$ forma un ángulo de $60°$ con PD, así que $\angle P'D'C = 120°$ y $PD \| D'C$. Además, es claro que $PD = D'C$. Por lo tanto, $PDCD'$ es un paralelogramo, que es lo que nos faltaba probar.

Solución del problema 30. Si k es el elemento mayor de un subconjunto de A de 7 elementos de $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, entonces $A \setminus \{k\} \subset \{1, 2, 3, \ldots, k-1\}$. Por lo tanto, hay $\binom{k-1}{6}$ subconjuntos de $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ cuyo máximo elemento es k. Cada uno de esos $\binom{k-1}{6}$ subconjuntos contribuye k a la suma, por lo que la suma deseada es:

$$\sum_{k=7}^{10} k\binom{k-1}{6} = \sum_{k=1}^{10} k\frac{(k-1)!}{6!(k-7)!} = \sum_{k=1}^{10} 7\frac{k!}{7!(k-7)!} = 7\sum_{k=7}^{10}\binom{k}{7} = 7\binom{11}{8}.$$

(Aquí usamos la fórmula $\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$. Esto se puede probar viendo que $\binom{n+1}{m+1}$ es el número de subconjuntos de $m+1$ elementos de $\{1, 2, 3, \ldots, n+1\}$ y que $\binom{k}{m}$ cuenta cuantos de ellos tienen como máximo elemento a $k+1$).

Solución del problema 31. Hay 2^n subconjuntos de N incluyendo el conjunto vacío, 2^{n-1} de los cuales contienen a n y 2^{n-1} que no contienen a n. Además se corresponden: si A es un conjunto que tiene a n, el conjunto $A\backslash n$ no lo contiene. La suma S de un conjunto A que contiene a n es de la forma $S = n-a+b-c\ldots$ y la suma $S' = a-b+c\ldots$. Luego $S+S' = n$ y hay 2^{n-1} de estas sumas. Por lo tanto, la suma total es $n \cdot 2^{n-1}$.

Solución del problema 32. Sea $a = AB = CD = DE$ la longitud del lado, $b = AC = CE$ la longitud de la diagonal menor y $c = AD = AE$ la longitud de la diagonal mayor. Por el teorema de Ptolomeo aplicado al cuadrilátero $ACDE$, tenemos que $ab+ac = bc$, ecuación que al dividir entre abc, nos da el resultado.

Solución del problema 33. Dividamos el cuadrilátero $AFDE$ por la diagonal AD, formando dos triángulos de áreas a y b que determinaremos. Usando el hecho de que si dos triángulos tienen la misma altura, la razón de sus áreas es igual a la razón de sus bases, tenemos que:

$$\frac{AE}{EC} = \frac{a}{3} = \frac{a+b+3}{12} \quad \text{y} \quad \frac{AF}{FB} = \frac{b}{3} = \frac{a+b+3}{12}$$

Estas identidades nos llevan al sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3a &= b+3 \\ 3b &= a+3 \end{aligned}$$

que admiten por solución, $a = b = \frac{3}{2}$, por lo que área $(AFDE) = 3$.

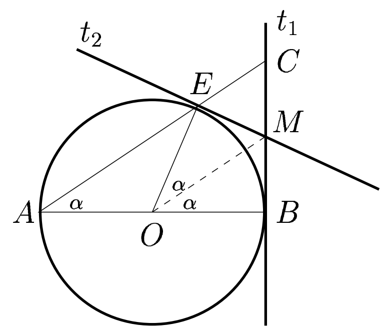
Solución del problema 34. Veamos que no es posible. Los cuadros de las esquinas serán pares, cuando un tablero de 2×2 se coloque en las esquinas un número impar de veces. El número del cuadro central se modifica con cualquier tablero de 2×2, luego si las esquinas se modifican para llegar a ser números pares, el central se modificará aumentando al número 1, los cuatro números impares, lo que dará al final un impar, no así un número par como desearíamos.

Segunda Solución. Inicialmente la suma de todos los números de la cuadrícula es 5, que es impar. Cada vez que se aplica la regla para modificar la cuadrícula, la suma aumenta en 4 y entonces el nuevo número es también impar. Una posición en que todos los números son pares tendrá una suma también par, luego no es posible llegar a la posición que se indica.

Solución del problema 35. Supongamos que para alguna n, 2^n termina en $198\dot{2}$. Como 2^n acaba en 2, 2^{n-1} deberá terminar en 1 ó 6. Si 2^{n-1} acaba en

1, entonces $2^{n-1} = 1$ y $2^n = 2$ lo cual no puede ser. Luego 2^{n-1} acaba en 6 y entonces $2^{n-1} = 10a + 6$ para algún entero positivo a, por lo que $2^n = 20a + 12$, como en $20a$ hay un número par de decenas (hay $2a$) y en 12 hay una, el dígito de las decenas de 2^n es impar, luego no puede ser 8, por lo que ninguna potencia de 2 termina en 82.

Solución del problema 36. Sea O el punto medio de AB y centro de la circunferencia. Como $MB = ME$ por ser longitudes de las tangentes a una circunferencia desde el punto M y como $OB = OE$ por ser radios, tenemos que los triángulos rectángulos OBM y OEM son congruentes, luego $\angle BOM = \angle MOE = \alpha$.



También tenemos que $\angle BAE = \frac{1}{2}\angle BOE = \alpha$, luego $AC \| OM$ y como O es punto medio de AB, tenemos que M es punto medio de BC.

Solución del problema 37. Las "sustituciones" no alteran la paridad de los números de la cuadrícula. En la cuadrícula original hay 13 pares y 12 impares, por lo anterior después de cualquier número de "sustituciones" habrán 13 números pares y 12 impares por lo que nunca se podrá llegar a los 12 pares y 13 impares que tienen los números del 1 al 25.

Solución del problema 38. No es posible. Sean r el número de regiones en una división de la esfera en triángulos y a el número de aristas que tiene esta división. Como cada triángulo tiene tres aristas y como cada arista delimita a dos regiones, se tiene que $3r = 2a$. Así una división de la esfera en r triángulos nos lleva a que $3r$ es par, por lo que r deberá ser par.

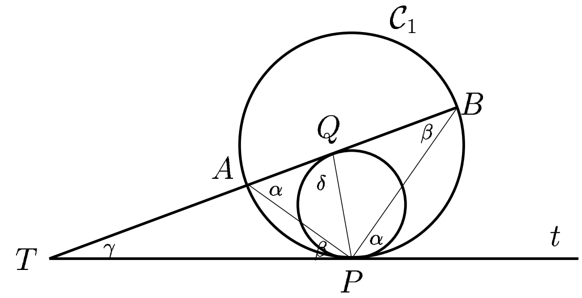
Solución del problema 39. Supongamos que es posible y sean p, q, r números primos que son las longitudes de los lados de un triángulo cuya área A es entera. De la fórmula de Herón, obtenemos:

$$16A^2 = (p+q+r)(p+q-r)(p-q+r)(-p+q+r)$$

Como los factores del lado derecho son todos de la misma paridad y como el lado izquierdo es par, tenemos que cada factor es par. Luego p, q y r no pueden ser los tres impares, así alguno es 2, digamos que $r = 2$. Por la desigualdad del triángulo, $q < p + 2$ y $p < q + 2$, por tanto $|p - q| < 2$.
Si $|p - q| = 1$, entonces como p y q son primos estos son 2 y 3 y el área A del triángulo de lados 2, 2 y 3 es $\frac{3\sqrt{7}}{4}$ que no es entero.
Si $|p - q| = 0$, entonces $p = q$ y tenemos que $16A^2 = (2p+2)(2p-2)(2)(2)$ luego $A^2 = p^2 - 1$ y como p y A son enteros, se deberá tener que $p = 1$ y $A = 0$ lo cual no es posible.
Así en cualquier caso llegamos a una contradicción.

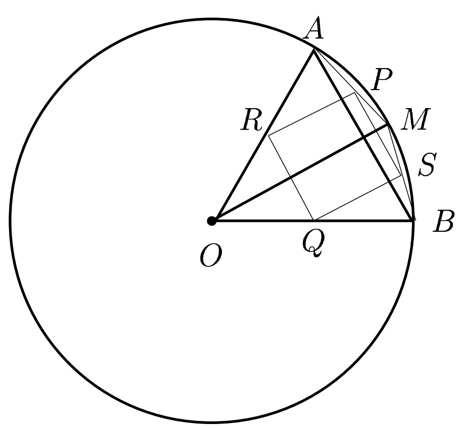
Solución del problema 40. Si tenemos 4 colores para pintar los 100 números, por el principio de las casillas, algún color se debe usar 25 o más veces, digamos que el color es el rojo y que los 25 números pintados de rojo son: $r_1 < r_2 < \ldots < r_{25}$.
Consideremos las 24 diferencias: $r_{25} - r_{24} < r_{25} - r_{23} < \ldots < r_{25} - r_1$, si alguna de estas diferencias es roja ya terminamos, por lo que supondremos ahora que no hay rojas, estos 24 números están entonces coloreados con 3 colores por lo que un color, digamos verde, se debe usar al menos 8 veces, sean $v_1 = r_{25} - r_{j_1} < \ldots < v_8 = r_{25} - r_{j_8}$ las diferencias coloreadas con verde. Las 7 diferencias $v_8 - v_1, \ldots, v_8 - v_7$, son distintas, positivas y menores que 100, si alguna es verde ya terminamos. Como cada una de estas diferencias $(v_8 - v_l) = (r_{25} - r_{j_8}) - (r_{25} - r_{j_l}) = r_{j_l} - r_{j_8}$, es una diferencia de rojos, ninguna de estas 7 diferencias es rojo, luego los 7 números son azules o amarillos. Estos 7 números al colorearse de amarillo o azul, usan un color al menos 4 veces, digamos el amarillo para: $a_1 = v_8 - v_{m_1} < a_2 = v_8 - v_{m_2} < a_3 = v_8 - v_{m_3} < a_4 = v_8 - v_{m_4}$.
Si una de las diferencias, $a_4 - a_1$, $a_4 - a_2$, $a_4 - a_3$ es amarilla acabamos, como $a_4 - a_i = (v_8 - v_{m_4}) - (v_8 - v_{m_i}) = v_{m_i} - v_{m_4}$, es diferencia de verdes. Tenemos que si $a_4 - a_i$ es verde, también acabamos. Y como $a_4 - a_i = v_{m_i} - v_{m_4} = r_{25} - r_{j_i} - \left(r_{25} - r_{j_{m_4}}\right) = r_{j_{m_4}} - r_{j_i}$ es también diferencia de rojos, tenemos que si $a_4 - a_i$ es roja también acabamos. Luego $b_4 = a_4 - a_1$, $b_2 = a_4 - a_2$ y $b_3 = a_4 - a_3$ son azules, ahora: $b_3 - b_1 = a_1 - a_3 = v_{m_3} - v_{m_1} = r_{j_{m_1}} - r_{j_{m_3}}$, es un número que se puede ver como diferencia de dos números pintados del mismo color y de cada color, luego también terminamos.

Solución del problema 41. Sea t la tangente por P, a $\mathcal{C}_1$ (y $\mathcal{C}_2$) y T el punto de intersección de t con AB. Tenemos que $TP = TQ$, por lo que el triángulo TPQ es isósceles.



Como t es tangente se tiene que el ángulo α que forma la tangente t con la cuerda BP es igual al $\angle BAP$. Análogamente $\beta = \angle ABP = \angle APT$. Luego si $\gamma = \angle QTP$ y $\delta = \angle TQP = \angle QPT$, tenemos que: $\alpha = \gamma + \beta$ por ser ángulo externo del triángulo ATP y $\gamma + 2\delta = 180°$ por ser la suma de los ángulos interiores del triángulo TPQ.
Por tanto, $2\gamma = 180° - \gamma = 180° - (\alpha - \beta)$.
Así, $\angle APQ = \delta - \beta = 90° - \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \beta = 90° - \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{180°(\alpha+\beta)}{2}$.
Pero $\angle APB = 180° - (\alpha + \beta)$ es constante para cualquier P dentro del arco AB, luego $\angle APQ$ es constante.

Solución del problema 42. El que $\angle AOB = 60°$, implica que el triángulo AOB es equilátero. Si R, Q son puntos medios, entonces $RQ \| AB$ y $RQ = \frac{1}{2}AB$. Si P, S son puntos medios, también $PS \| AB$ y $PS = \frac{1}{2}AB$.



Además $SQ = PR = \frac{1}{2}MO = \frac{1}{2}AB$. Análogamente $SQ \| MO \| PR$, luego $PRQS$ es un paralelogramo de lados iguales, es decir un rombo. Pero en un rombo las diagonales son perpendiculares.

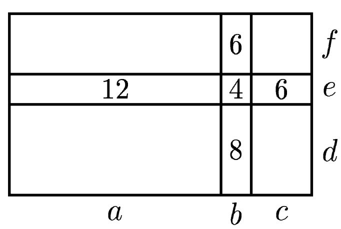
Solución del problema 43. Observemos que módulo 7, se tiene que:

$$\begin{aligned} (7n \pm 1)^3 &\equiv (\pm 1)^3 \equiv \pm 1 \\ (7n \pm 2)^3 &\equiv (\pm 1)^3 \equiv \pm 1 \\ (7n \pm 3)^3 &\equiv (\pm 1)^3 \equiv \pm 1 \\ (7n)^3 &\equiv 0 \end{aligned}$$

Luego $x^3 + y^3 - z^3 \equiv 0$ módulo 7, implica que uno de x^3, y^2, z^3 es congruente a 0 módulo 7 y entonces x, y ó $z \equiv 0$ (mod 7).

Solución del problema 44. Supongamos que ninguno de p_1, p_2, p_3 es divisible entre 3 entonces $p_j \equiv \pm 1 \pmod 3$, por lo que $p = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 \equiv 0 \pmod 3$. Pero si p es primo, debe ser $p = 3$, lo que es una contradicción pues $p = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 > 3$. Por tanto $p_1 = 3$.

Solución del problema 45. Sean a, b, c, d, e y f las longitudes de los segmentos en que se han dividido los lados del rectángulo, como muestra la figura.

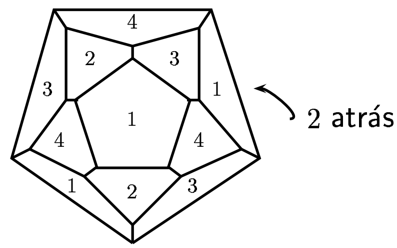


De los perímetros conocidos tenemos:

$$\begin{aligned} a + e &= 6 \\ b + e &= 2 \\ c + e &= 3 \\ d + b &= 4 \\ f + b &= 3 \end{aligned}$$

luego: $a + b + c + d + e + f + 2b + 2e = 18$.
Así $a + b + c + d + e + f = 18 - 2(b + e) = 18 - 4 = 14$.
Por lo que el perímetro del rectángulo es 28.

Solución del problema 46. (i) No es posible por lo siguiente, en un pentágono debemos poner un color, digamos el color A, alrededor de él hay 5 pentágonos que se deben colorear con los otros dos colores B y C, pero como se debe de ir coloreando en forma alternada B, C, B, C en el quinto pentágono no importa que color pongamos tendremos dos colores iguales juntos.
(ii) Una coloración con 4 colores es la siguiente



Solución del problema 47. Sea $x_i x_{i+1} x_{i+2} x_{i+3}$, uno de los sumandos, si de los factores hay a números que son -1 y $4-a$ que son 1, tenemos que:

$$x_i x_{i+1} x_{i+2} x_{i+3} = (-1)^a$$

Pero $(-1)^a \equiv 1 - 2a \equiv 1 + (4-a) - a \equiv 1 + x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3} \pmod 4$. Luego:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} x_i x_{i+1} x_{i+2} x_{i+3} \equiv \sum_{i=1}^{n} (1 + x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3}) \equiv n \pmod 4)$$

la última congruencia se sigue de que cada x_i aparece 4 veces, luego n es divisible entre 4.

Solución del problema 48. Supongamos que n es el número buscado, debemos tener que:

$$\begin{array}{lclcl} n & = & (a+1)+(a+2)+\ldots+(a+9) & = & 9a+45 = 9\,(a+5) \\ n & = & (b+1)+(b+2)+\ldots+(b+10) & = & 10b+55 = 5\,(2b+11) \\ n & = & (c+1)+(c+2)+\ldots+(c+11) & = & 11c+66 = 11(c+6) \end{array}$$

luego n deberá ser múltiplo de 9, 5 y 11, como el número más pequeño que es múltiplo de estos tres es $9 \cdot 5 \cdot 11 = 495$, este es el número buscado, bastará tomar $a = 50$, $b = 44$ y $c = 39$.

Solución del problema 49. Supongamos que es posible y que $102a$ es la suma de los elementos de A_1, $203b$ la suma de los elementos de A_2 y $304c$ la de los de A_3. Como entre A_1, A_2 y A_3 se tienen todos los números entre 1 y 100. $102a + 203b + 304c = 1 + 2 + ... + 100 = 50 \cdot 101$, la ecuación anterior se puede reescribir como: $a + b + c + 101\,(a + 2b + 3b) = 50 \cdot 101$.
Luego, $101 \mid a + b + c$ y como $a + b + c > 0$, tenemos que $a + b + c \geq 101$. Por otra parte: $101\,(a + b + c) < 102a + 203b + 304c = 50 \cdot 101$, de donde $a + b + c < 50$, lo que es una contradicción. Luego no es posible.

Solución del problema 50. La primera hoja tiene las páginas 1 y 2, la segunda hoja los páginas 3 y 4, luego la siguiente las 5 y 6,... en general una hoja tiene las páginas $4n + 1$ y $4n + 2$ o las páginas $4n + 3$ y $4n + 4$. En cualquier caso la suma de los números de cada hoja es congruente a 3 módulo 4. Luego la suma de los números en 24 hojas es $24 \cdot 3 \equiv 0 \pmod 4$ y como $1998 \equiv 2 \pmod 4$, nunca podrá ser la suma 1998.

Solución del problema 51. Veamos como cambia la suma σ de los 10 números, cuando un cuadrito cambia de valor, es decir cuando el cuadrito se multiplica por -1. Cuando hacemos este cambio el producto del renglón y de la columna correspondiente también cambian de signo, luego la suma se altera por -4, 0 ó 4 dependiendo si los productos del renglón y de la columna eran los dos $+1$, uno $+1$ y el otro -1 o los dos eran -1. Así la operación de cambiar el valor de un cuadrito, altera la suma σ en múltiplos de 4. Si al principio hay puros 1, tenemos que $\sigma = 10$ y entonces los únicos valores posibles son $10, 6, 2, -2, -6$ y -10, por lo que nunca se obtendrá el valor 0.

Solución del problema 52. $\frac{p^2+q^2}{p+q}$ es entero si y sólo si $\frac{p^2+q^2+2pq-2pq}{p+q} = \frac{(p+q)^2-2pq}{p+q}$ es entero, si y sólo si $\frac{2pq}{p+q}$ es entero.
Luego $p+q$ divide a $2pq$, pero los divisores de $2pq$, son $1, 2, p, q, 2p, 2q, pq$ y $2pq$.
$p + q = 1$ ó 2 es imposible por ser p y q mayores que 1.
$p + q = p$ ó $p + q = q$ nos lleva a que uno de p ó q es cero lo cual es falso.
$p + q = 2p$ ó $p + q = 2q$ nos lleva a que $p = q$.
$p + q = pq \Rightarrow p = q(p - 1)$ como p y q son primos, tenemos que $p = q = 2$
$p + q = 2pq \Rightarrow p = q(2p - 1)$ y como q es primo, llegamos a que $p = 1$, que es una contradicción.

Solución del problema 53. $3 \mid abcd \Leftrightarrow 3 \mid a+b+c+d \Leftrightarrow 3 \mid a+b+c+d-3b+3d = a - 2b + c + 4d$.

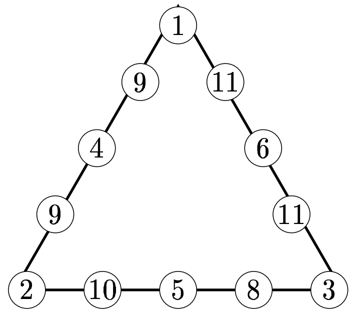
Solución del problema 54. Supongamos que el cuadrado $ABCD$ tiene área igual a 1, luego el área del cuadrilátero $BCPA$ es $\frac{3}{4}$ y el área del cuadrilátero $APCD$ es $\frac{1}{4}$. Como el área del cuadrilátero $BCPA$ es mayor que $\frac{1}{2}$, P está del mismo lado de AC que D.

Ya que: $\frac{3}{4} = \text{área}\,(BCPA) = \text{área}\,(ABC) + \text{área}\,(APC) = \frac{1}{2} + \text{área}\,(APC)$, tenemos que $\text{área}\,(APC) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\,\text{área}\,(ADC)$. Pero los triángulos APC y ADC tienen la misma base, la altura del triángulo APC es la mitad de la altura del triángulo ADC, luego la parte roja es el segmento paralelo a AC que está a la mitad de la altura de D a AC, es decir, es el segmento que une los puntos medios de AD y DC.

Solución del problema 55. Sean a, b, c, d y e los números de cajas en las pilas de izquierda a derecha, por las condiciones del problema tenemos que: $1 \leq e \leq d \leq c \leq b \leq a \leq 5$ o equivalentemente: $1 \leq e < d+1 < c+2 < b+3 < a+4 \leq 9$. Es fácil contar el número de soluciones de esta desigualdad. Cada subconjunto de $\{1, 2, ..., 9\}$ con 5 elementos corresponde a una única solución (pues podemos ordenar sólo de una manera los elementos del subconjunto). Luego hay $\binom{9}{5} = 126$ maneras de apilar las cajas.

Solución del problema 56. Si tocamos una vez cada uno de los n^2 focos de una cuadrícula de $n \times n$ focos en principio apagados, todos quedarán prendidos. En efecto cada foco cambia de estado cada vez que un foco del renglón o columna, donde se encuentra es tocado, es decir, cambia de estado $2n - 1$ veces. Como $2n - 1$ es impar queda prendido el foco.

Solución del problema 57. Observemos que $1 + 2 + ... + 12 = \frac{13 \times 12}{2} = 78$.
(i) Supongamos que sí es posible lograr que las sumas sean 27, y sean a, b y c los números que quedan colocados en los vértices del triángulo. Entonces en los lados del triángulo sin contar los extremos las sumas son $27 - a - b$, $27 - b - c$ y $27 - c - a$. Entonces $a + b + c + (27 - a - b) + (27 - b - c) + (27 - c - a) = 78$, por tanto $3 \times 27 - (a + b + c) = 78$, de donde $a + b + c = 3$, lo cual es imposible.
(ii) Para ver que sí es posible con 28 consideremos la suma como arriba; en este caso $3 \times 28 - (a + b + c) = 78$, por lo que $a + b + c = 6$. Pongamos $a = 1$, $b = 2$ y $c = 3$. Entonces las sumas en los lados sin considerar los extremos deben ser 25, 24 y 23. Pongamos 12 en el lado con suma 25, 11 en el que tiene suma 24 y 10 en el de suma 23; entonces en las casillas que sobran en cada lado la suma debe ser 13, lo cual se logra con $4 + 9$, $5 + 8$ y $6 + 7$ como se muestra en el esquema.



Solución del problema 58. Sea O el centro del octágono. De la ley de cosenos en el triángulo ABO,

$$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos 45^\circ} = \sqrt{2 - 2\cos 45^\circ} = 2 - \sqrt{2}.$$

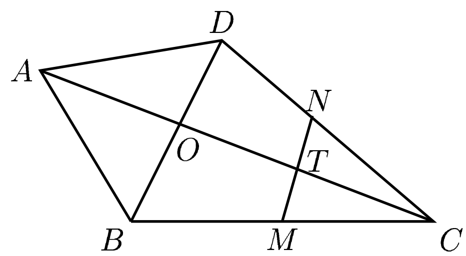
Usando la ley de cosenos en los triángulos ACO y ADO obtenemos:

$$AC = \sqrt{2 - 2\cos 90^\circ} = \sqrt{2}, \quad AD = \sqrt{2 - 2\cos 135^\circ} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

y finalmente, $AB \cdot AD = \sqrt{2 - \sqrt{2}}\sqrt{2 + \sqrt{2}} = \sqrt{4 - 2} = \sqrt{2} = AC.$

Solución del problema 59. Si los cuatro puntos A, B C y D forman un cuadrilátero convexo, tenemos que los ángulos interiores del cuadrilátero suman 360°, luego no es posible que los cuatro ángulos sean menores de 90°, digamos que $\angle A \geq 90^\circ$ entonces A junto con los dos vértices adyacentes forman un triángulo que no es acutángulo.
Si los cuatro puntos no forman un cuadrilátero convexo, hay tres que forman un triángulo, digamos A, B y C dejando al cuarto punto D dentro del triángulo ABC, si nos fijamos en los ángulos $\angle ADB$, $\angle BDC$ y $\angle CDA$ al menos uno de ellos es mayor de 90° si por ejemplo es el primero, tendremos que ADB es el triángulo no acutángulo.

Solución del problema 60. Supongamos que O es el gravicentro del triángulo AMN. Sea $T = AC \cdot MN$. Como O es el gravicentro de AMN, T es punto medio de MN y $AO = 2OT$.



Como M y N son los puntos medios de los lados CB y CD del triángulo BCD, el que T sea punto medio de MN implica que O es el punto medio de BD, también como M y N son puntos medios, $OT = TC$.
Entonces $AO = 2OT = OT + TC = OC$. Así que AC y BD se bisectan, de modo que $ABCD$ es paralelogramo.
Recíprocamente, si $ABCD$ es paralelogramo, $AO = OC = 2OT$ y T es el punto medio de MN. De modo que AT es mediana del triángulo AMN y O la divide en razón 2 a 1 por lo tanto O es el gravicentro del triángulo AMN.

Solución del problema 61. Si arreglamos los números en forma triangular

$$\begin{array}{lllllll}
1 \\
2 & 4 \\
5 & 7 & 9 \\
10 & 12 & 14 & 16 \\
17 & 19 & 21 & 23 & 25 \\
. \\
. \\
. \\
1850 & . & . & . & . & 1936 = 44^2 \\
1937 & . & . & . & . & 2023 & 2025 = 45^2 \\
2026
\end{array}$$

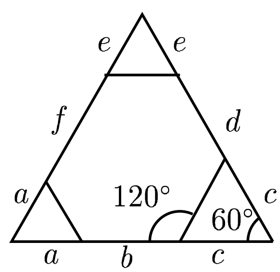
Vemos que el par más cercano a 1998 es el 2026.

Solución del problema 62. (i) Tomemos tres enteros positivos consecutivos $n-1$, n y $n+1$. Entonces su producto es n^3-n. Ahora observemos que $(n-1)^3 < n^3 - n < n^3$ (la segunda desigualdad es clara; para ver la primera, notemos que $(n-1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1$, así que basta probar que $-3n^2 + 3n - 1 < -n$, esto es, $3n^2 - 4n + 1 > 0$, es decir, $(n-1)(3n-1) > 0$; pero esta última es clara pues ambos factores son positivos ya que $n \geq 2$). Entonces $n^3 - n$ no puede ser el cubo de un entero pues se encuentra entre dos cubos consecutivos que son $(n-1)^3$ y n^3.

(ii) Supongamos que $2p+1 = A^3$, con A entero. Notemos que entonces A es impar. Despejando p tenemos $p = \frac{A^3-1}{2} = \left(\frac{A-1}{2}\right)(A^2+A+1)$. Pero p es primo y $\frac{A-1}{2}$ es entero (pues A es impar), así $\frac{A-1}{2} = 1$ ó $A^2+A+1 = 1$; como la segunda ecuación es imposible $(A > 0)$, entonces $A-1 = 2$, así $2p+1 = 27$ y $p = 13$.

Solución del problema 63. Observemos que la única manera en que se pueden cumplir simultáneamente las dos condiciones $a > b > c$ y que a sea factor de $b+c$, es que $b+c = a$. Entonces $a+c = b+2c$ y como b es divisor de $a+c$, entonces b debe ser divisor también de $2c$; otra vez, ésta última condición junto con la hipótesis $b > c$ nos dice que $b = 2c$. Por tanto $a = b+c = 3c$. Entonces $\frac{abc}{a+b+c} = \frac{6c^3}{6c} = c^2$.

Solución del problema 64. Como los ángulos del hexágono son iguales, este ángulo vale 120^o, luego si prolongamos lados alternados del hexágono al intersectarse obtenemos un triángulo equilátero .



Sean a, b, c, d, e, f los lados del hexágono como se muestra en la figura entonces $a+b+c+d+e+f = 21$ y si l es el lado del triángulo equilátero formado, entonces $l = a+b+c = c+d+e = e+f+a$ de donde obtenemos que $3l = 21+a+c+e$, así $l = 7+\frac{a+c+e}{3}$. Pero el valor más chico de $a+c+e$ es 2 cuando la terna (a,c,e) toma los valores $1, 2, 3$ y el más grande es 5 cuando toma los valores $4, 5, 6$. Los valores 3 y 4 los toma únicamente en las ternas que se indica en la siguiente tabla:

$\frac{a+c+e}{3}$	(a,c,e)
2	$(1,2,3)$
3	$(1,2,6)$
	$(1,3,5)$
	$(2,3,4)$
4	$(3,4,5)$
	$(1,5,6)$
	$(2,4,6)$
5	$(4,5,6)$

En el caso de $\frac{a+c+e}{3} = 2$, obtenemos el hexágono tomando $a = 1$, $c = 2$ y $e = 3$, entonces $b = 6$, $d = 4$ y $f = 5$. (Observe que no importa el orden en que se tomen los números 1, 2, 3 para la terna (a, c, e) pues el hexágono es el mismo). Para el siguiente caso donde $l = 10$ la única terna posible es $(1, 3, 5)$, pues por ejemplo la terna $(1, 2, 6)$ es imposible ya que para formar el triángulo de lado 10, en el lado donde aparece 1 y 2 necesitaríamos un segmento de entre b, d, f de medida 7 lo cual es imposible. De la misma forma para el caso $l = 11$ sólo es posible formar un triángulo con la terna $(2, 4, 6)$ y finalmente para $l = 12$ obtenemos otro triángulo posible. Así hemos encontrado cuatro hexágonos posibles con esas características. Las áreas posibles son dos como se ve en el siguiente esquema, recuerde que el área de un triángulo equilátero de lado l es $\frac{l^2 \operatorname{sen} 60^o}{2}$, luego el área del hexágono es $\frac{\operatorname{sen} 60^o}{2}(l^2 - (a^2 + c^2 + e^2))$:

$\frac{a+c+e}{3}$	l	área
2	9	$\frac{\sqrt{3}}{4}67$
3	10	$\frac{\sqrt{3}}{4}65$
4	11	$\frac{\sqrt{3}}{4}65$
5	12	$\frac{\sqrt{3}}{4}67$

Solución del problema 65. Supongamos que sí es posible y que el acomodo es el siguiente:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Entonces la suma que se pide que sea igual a 1997 es:

$$abc + def + ghi + adg + beh + cfi = 1997$$

Pero al tomar congruencia módulo 9, tenemos en el lado izquierdo que:

$$\begin{aligned} abc + def + ghi + adg + beh + cfi &\equiv 2\,(a+b+c+d+e+f+g+h+i) \\ &\equiv 2\,(1+2+3+4+5+6+7+8+9) \\ &\equiv 2 \cdot 45 \equiv 0 \pmod 9 \end{aligned}$$

Por otro lado $1997 \equiv 8 \pmod 9$. Luego, no es posible el acomodo.

3.2. Soluciones de los últimos tres Concursos Nacionales de la OMM

Solución del problema 1. Para que el número sea múltiplo de 3 la suma de sus dígitos debe ser múltiplo de 3. Por lo tanto, el número de sietes deberá ser múltiplo de 3. Si hay 0 ó 6 sietes el número no resulta múltiplo de 7 (esto puede verse de varias maneras: directamente dividiendo entre 7; usando congruencias; o, en caso de un número con 6 sietes, diciendo que por ser suma de un número de 6 sietes y un cero, con un número que es un tres seguido de ceros, no puede ser múltiplo de 7; etc.)

Si el número tiene 3 sietes, es suma de un número de 3 sietes y algunos ceros con un número de 4 treses y algunos ceros. Para que sea múltiplo de 7 el número original, debe serlo el de 4 treses y algunos ceros. Los números $3, 30, 300, ..., 3000000$ dejas residuos $3, 2, 6, 4, 5, 1, 3$ al dividir entre 7, respectivamente. Sólo resta encontrar todas las maneras de elegir cuatro de éstos que sumen un múltiplo de 7. (Se simplifica el trabajo si ponemos siempre los cuatro residuos en orden creciente). Son las siguientes: $1, 2, 5, 6; 1, 3, 4, 6$ (son 2 pues hay dos $3's$ distintos); $2, 3, 4, 6; 2, 3, 4, 5$ (son 2, pues hay dos $3's$ distintos). Estas 6 combinaciones corresponden a los números 7337337, 3373377, 7373373, 3777333, 3733737, 7733733, que son los deseados.

Segunda Solución. Hay muchas maneras de resolver este ue involucran más o menos trabajo.

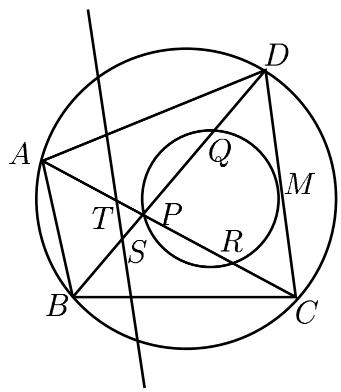
Se puede decir desde el principio que el número se escribe como $3a + 7b$, donde a y b son números de ceros y unos que suman 1111111. Entonces, el número es

$3(111111-b)+7b = 333333+4b$. Aquí, b debe ser múltiplo de 3, y como 333333 deja residuo 3 al dividir entre 7, b debe dejar residuo 1. Por lo tanto, buscamos números de ceros y unos con 0, 3 ó 6 unos que dejen residuo 1 al dividir entre 7. Esto es parecido a lo de arriba, pero un poco más fácil (porque ahora sólo son 3 residuos en lugar de 4).
Se pueden encontrar las maneras de escoger 4 de $3, 2, 6, 4, 5, 1, 3'$ de manera que sumen un múltiplo de 7 con un argumento combinatorio. Los agrupamos en parejas que sumen 7: $1-6$, $2-5$, $3-4$ y $3'-4$. Si usamos los dos números de una pareja, los otros dos números deben formar una pareja también. Si usamos parejas de éstas, no podemos usar la de 3 y la de $3'$ porque repiten el 4. Esto nos da $\binom{4}{2}-1=5$ combinaciones. Ahora, si no usamos parejas, es fácil ver que necesitamos usar tanto el 3 como el $3'$. Los otros dos números deben sumar 8, la única posibilidad es 2, 6.
Para encontrar los múltiplos de 7 entre los números con 3 sietes, podemos hacer las divisiones: son 35. Cambiar los sietes por ceros ayuda). Después de hacer eso, podemos dividir entre 3, es decir cambiar los treses por unos, que puede simplificar un poco el trabajo). Aquí conviene observar que los ceros del final no contribuyen a que el número sea múltiplo de 7; eliminarlos reduce las 35 divisiones a 20.

Solución del problema 2. Si se toman tres pelotas de colores diferentes, éstas se encuentran en una o dos cajas sólamente. Veamos que hay tres pelotas de colores distintos que están en dos cajas distintas.
De lo contrario cualesquiera tres pelotas de colores distintos están siempre en una misma caja. Sean A, B, C pelotas de colores diferentes (hay por lo menos 3 colores). Deben estar en la misma caja. Sea P cualquier otra pelota. P difiere en color con por lo menos dos de A, B y C, por lo que también está en la caja de A, B y C. Entonces, todas las pelotas están en una caja y como hay por lo menos tres cajas, hay cajas vacías, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, existen tres pelotas A, B y C de colores distintos tales que A y B están en la misma caja, y C está en otra.
Ahora, consideremos una pelota P que no está ni en la caja de A y B, ni en la de C (hay por lo menos tres cajas). Entonces, A, C y P están en cajas distintas y por lo tanto, P es del mismo color que A o del mismo color que C. Análogamente, considerando B, C y P, vemos que P es del color de B o del de C. Por lo tanto, es del color de C. En resumen, cualquier pelota de una caja diferente a la de A (y B) y a la de C es del mismo color que C. Escogiendo ahora una pelota C' de

una de estas cajas (es decir de una caja que no es ni la de A y B, ni la de C) y repitiendo el argumento, vemos que todas las pelotas de la caja de C son del mismo color que C' y, por lo tanto, del mismo color que C. Así todas las pelotas que no están en la caja de A y B son del mismo color.

Solución del problema 3. Por el teorema de la potencia de un punto, tenemos que $AP \cdot PC = BP \cdot PD$ y que $DQ \cdot DP = DM^2 = CM^2 = CR \cdot CP$.



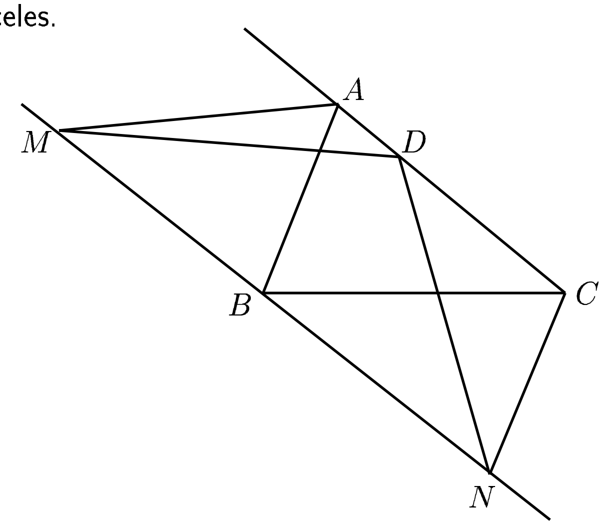
Ahora, por el teorema de Tales aplicado a las paralelas AB y ST,

$$\frac{AT}{AP} = \frac{BS}{BP} = \frac{DQ}{BP} = \frac{DQ \cdot DP}{BP \cdot DP} = \frac{CR \cdot CP}{AP \cdot PC} = \frac{CR}{AP}$$

que es lo que queríamos probar.

Solución del problema 4. Son todas las $n \geq 6$.
Sea $a_1, a_2, ..., a_{2001}$ la lista (sin signos) que se obtiene para $a = 2$ (donde $a_1 = 2$) y sea S su suma alternada. Si $S \leq 0$ nos fijamos en $a = a_2$, su lista asociada es $a_2, a_3, ..., a_{2001}$, a_{2002}. La suma alternada de esta lista es $-(S-2) + a_{2002} = -S + 2 + a_{2002} > 0$. De modo que si 2 no cumple la condición, a_2 sí, siempre y cuando esté entre 2 y $\frac{n}{2}$. Si $n \geq 9$, $a_2 = 4$ y está en el rango deseado, de modo que para $n \geq 9$ existe a que cumpla las condiciones. Veamos $n = 5, 6, 7, 8$:
Para $n = 5$ la única a en el rango es 2 y no cumple. Su lista asociada es $2, 4, 1, 1, 1, ...$ cuya suma alternada es -1.
Para $n = 6$ elegimos $a = 2$. Su lista es $2, 4, 4, 4, ...$ cuya suma alternada es 2.
Para $n = 7$ elegimos $a = 3$. Su lista es $3, 2, 4, 2, 4, 2, 4, ...$ cuya suma alternada es $3 + 2 \cdot 1000 = 2003$.
Para $n = 8$ también elegimos $a = 3$. Su lista es $3, 1, 1, 1, ...$ cuya suma alternada es 3.

Solución del problema 5. Notemos que $\angle MAB = 90 - \angle A/2$ y que $\angle MBA = \angle A$, por lo que $\angle AMB = 180 - (\angle A + 90 - \angle A/2) = 90 - \angle A/2$ y así AMB es isósceles. Entonces, $MB = AB = CD$, de modo que MB y DC son iguales y paralelos, por lo que $MBCD$ es un paralelogramo. Por lo tanto, $\angle DMB = \angle C$. Por otra parte, $ABNC$ es un paralelogramo, de modo que $\angle BNC = \angle A$ y $\angle DCN = 180 - \angle A$. También, $CD = AB = NC$, por lo que DCN es isósceles.



Entonces, $\angle NDC = \angle DNC = \angle A/2$. Por lo tanto, $\angle BND = \angle A/2$.

Como $\angle C = \angle A/2$, tenemos que $\angle BND = \angle DMB$, por lo que MDN es isósceles y $MD = ND$.

Solución del problema 6. Sean $C_1, ..., C_5$ las cajas. Introducimos cajas auxiliares $D_1, ..., D_5$. En la caja D_i ponemos una moneda de cada denominación que falta en C_i. Notemos que (a) y (b) se cumplen para las cajas D_i. En cambio, (c) y (d) se transforman en:

(c') Cualesquiera dos $D_i's$ distintas no pueden tener denominaciones en común.

(d') Para cualquier denominación, ha una moneda de esa denominación en alguna D_i.

Así (c') y (d') nos dicen que las denominaciones están repartidas en las cajas D_i. Resolvemos mejor el problema para estas cajas.

Por (a), (b) y (c'), si cada D_i tiene t monedas, $n = 5t$. Aquí, t no puede ser 1, pues no se cumpliría (b). Probaremos que n puede ser cualquier $5t$ con $t \geq 2$. Para $t = 2$ acomodamos las monedas como sigue:

D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
1	2	3	4	5
10	9	8	7	6

Para $t = 3$ las acomodamos así:

D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
1	2	3	4	5
8	9	10	6	7
15	13	11	14	12

Observemos ahora que dada una distribución de monedas en cajas que cumpla (a), (b) y (c') podemos agregarle el mismo valor a cada moneda en esas cajas, y la distribución sigue cumpliendo las tres condiciones. También, si tenemos dos distribuciones que cumplan esas tres condiciones y que no tengan denominaciones en común podemos unirlas en una sola que también las cumpla. Simplemente ponemos en la primer caja de una nueva distribución lo que estaba en las primeras cajas de las otras dos distribuciones, en la segunda caja lo que había en las segundas cajas de las otras dos, etc.
Entonces, podemos hacer una distribución para $t = 5$ como sigue: hacemos la de $t = 3$ (ésta usa las denominciones $1, 2, ..., 15$), hacemos la de $t = 2$ agregando a cada moneda 15 (ésta usa las denominaciones 16, $17, ..., 25$); finalmente, juntamos esas dos.
Ahora, con la distribución para $t = 5$ podemos hacer una para $t = 7, 9, 11, ...$. También en lugar de usar distribuciones para $t = 3$ y $t = 2$, podemos usar varias veces la de $t = 2$; así obtenemos distribuciones para $t = 4, 6, 8, ...$.

Solución del problema 7. Si uno hace las operaciones del problema en una cuadrícula de 4×4 es fácil conjeturar que al terminar todas las operaciones, la cuadrícula queda girada $90°$ en el sentido de las manecillas del reloj. Probémoslo: Si se empezara con una cuadrícula de 2×2, obviamente quedaría girada. Supongamos que si se empieza con una cuadrícula de $n \times n$ termina girada, donde n es alguna potencia de 2. Para una cuadrícula de $2n \times 2n$ la primer operación nos lleva de:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline a \rightarrow & b \rightarrow \\ \hline d \rightarrow & c \rightarrow \\ \hline \end{array} \quad \text{a} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline d \rightarrow & a \rightarrow \\ \hline c \rightarrow & b \rightarrow \\ \hline \end{array}$$

(donde las flechas indican que los números están en orden creciente de izquierda a derecha en cada renglón). El resto de los movimientos se hacen dentro de esas cuatro subcuadrículas de $n \times n$ y ya sabemos que el resultado de esas es girar cada cuadro $90°$, de modo que obtenemos:

$d \downarrow$	$a \downarrow$
$c \downarrow$	$b \downarrow$

(donde las flechas indican que los números están en orden creciente de arriba a abajo en cada columna). Esto es la cuadrícula de $2n \times 2n$ girada $90°$. Esto prueba (por inducción) que el resultado de aplicar las operaciones del problema en cualquier cuadrícula cuadrada cuyo lado es potencia de 2 es girar la cuadrícula $90°$ en el sentido de las manecillas del reloj.
Por lo tanto, los números que quedan en la diagonal son 32, $63, 94, 125, ..., 993$ (aumentan de 31 en 31).

Solución del problema 8. Como AD es paralela a BE, los arcos AB y DE son iguales y por lo tanto, $DE = AB = DC$ y CDE es isósceles. Análogamente, CBF es isósceles. Sean M y N los puntos medios de CE y CF respectivamente. Por los triángulos isósceles, las rectas DM y BN son las mediatrices de los segmentos CE y CF, y entonces, su intersección K es el circuncentro. El cuadrilátero $MCNK$ es cíclico (por tener dos ángulos opuestos rectos) y por lo tanto, $\angle BKD = 180° - \angle ECF = 180° - \angle BCD = \angle ABC = \angle BED$. Por lo tanto el cuadrilátero $BKED$ es cíclico, es decir, K está sobre $\mathcal{K}$.
Segunda Solución. Sea K el circuncentro de CEF. Entonces, $\angle EKF = 2\angle ECF$. Como AD es paralela a BE, los arcos AB y DE son iguales y por lo tanto, $DE = AB = DC$ y CDE es isósceles, de donde $\angle EDC = 180° - 2\angle ECD$. Por lo tanto, $\angle EKF + \angle EDC = 180°$, así que $EKFD$ es cíclico y K está sobre $\mathcal{K}$.

Solución del problema 9. Tiene más de la forma $4k + 1$. En efecto, si n no es divisible por primos de la forma $4k - 1$, todos sus divisores impares son de la forma $4k + 1$. ¿Qué pasa cuando se "agrega" un primo de la forma $4k - 1$?. Supongamos que n cumple que $r > s$ donde r y s son los números de divisores de n^2 de las formas $4k + 1$ y $4k - 1$ respectivamente. Sea q un primo de la forma $4k - 1$ que no divide a n. Probaremos que $m = q^{\alpha}n$ también cumple la condición.

Cualquier divisor de m^2 es de la forma $q^\beta d$ donde d es divisor de n^2 y $0 \leq \beta \leq 2\alpha$. El divisor $q^\beta d$ es de la forma $4k+1$ si d lo es y β es par, o si d es de la forma $4k-1$ y β es impar. Por lo tanto, m^2 tiene $(\alpha+1)r+\alpha s = \alpha(r+s)+r$ divisores de la forma $4k+1$. Un razonamiento similar nos dice que m^2 tiene $\alpha(r+s)+s$ divisores de la forma $4k-1$. Entonces, m^2 tiene más divisores de la forma $4k+1$ que de la forma $4k-1$.

Esto prueba (por inducción) que n^2 siempre tiene más divisores de la forma $4k+1$.

Segunda Solución. Sea $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_r^{\alpha_r} q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} ... q_s^{\beta_s}$ la factorización de n como producto de potencias de primos distintos, donde los q_i son los primos de la forma $4k-1$ que dividen a n, y los p_i son los de la forma $4k+1$ y un p_i es 2 si n es par). Separamos todos los divisores de n^2 en dos clases: los que son divisibles por algún q_i y los que no son divisibles por ninguno. Dado un divisior $d = p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} ... p_r^{\lambda_r} q_1^{\mu_1} q_1^{\mu_1} ... q_s^{\mu_s}$ de la primera clase, buscamos la mínima i tal que $\mu_i \neq 0$ y a d le asociamos el divisor $d' = p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} ... p_r^{\lambda_r} q_1^{\mu_1} q_1^{\mu_1} ... q_i^{\mu_i'} ... p_s^{\mu_r}$ donde

$$\mu_i' = \begin{cases} \mu_i + 1 & \mu_i < 2\alpha_i \\ 1 & \mu_i < 2\alpha_i. \end{cases}$$

Si d es par, d' también lo es. Si d es de la forma $4k+1$, d' es de la forma $4k-1$ y viceversa.

Esto nos da una biyección, en los divisores de la primera clase, entre los divisores de la forma $4k-1$ y los de la forma $4k+1$. Los divisores de la segunda clase son todos pares o de la forma $4k+1$ (y hay al menos uno de la forma $4k+1$, a saber: 1), por lo que n^2 tiene más divisores de la forma $4k+1$ que de la forma $4k-1$.

Solución del problema 10. Para que la suma de los números en la primer ficha sea impar, uno de ellos debe ser par y el otro impar. Para que la suma siga impar, las siguientes fichas deben tener suma par, es decir, tener ambos números pares o ambos impares. Todas las fichas par-par deben quedar del lado par de la primera ficha y las impar-impar del lado impar.

Las mulas (fichas dobles) siempre pueden colocarse en una hilera que cumpla las condiciones de manera que se sigan cumpliendo, por lo tanto, en una hilera de longitud máxima se usan las siete. Encontremos la longitud máxima de una hilera sin mulas:

Del lado impar se pueden usar todas las fichas: $\boxed{1|3}$ $\boxed{3|5}$ $\boxed{5|1}$, por ejemplo. en cambio del lado par sólo se pueden usar 5 de las 6 fichas. En efecto, cuando

las fichas se acomodan en hilera, cada número que no esté en un extremo aparece un número par de veces. Pero cada número par $(0, 2, 4, 6)$ aparece 3 veces en las fichas par-par y no pueden estar todos en los extremos. Por lo tanto debemos dejar sin usar al menos una de las fichas. Entonces la longitud máxima de la parte par es a lo más 5 y la longitud máxima de una hilera es a lo más $7+3+1+5 = 16$: 7 mulas, 3 impar-impar, 1 impar-par y 5 par-par. Que de hecho se pueden formar hileras de esa longitud se verá cuando las contemos.
¿De cuántas formas se puede formar el lado impar (sin mulas)? Una vez que se elige con que ficha empezar el resto tiene dos opciones, por ejemplo si empezamos con $\boxed{1|3}$, debe quedar $\boxed{1|3}$ $\boxed{3|5}$ $\boxed{5|1}$ o $\boxed{3|1}$ $\boxed{1|5}$ $\boxed{5|3}$. Así que hay 6 formas. Ahora con mulas: una vez puestas las otras fichas las mulas se pueden insertar de dos formas: la mula del número en los extremos se puede poner en cualquiera de los dos extremos y las otras dos están obligadas. Por lo tanto con todo y mulas hay $6 \cdot 2$ formas de hacer el lado impar.
¿Y el lado par (sin mulas)? Ya vimos que debe faltar una ficha, digamos $\boxed{0|6}$. En las demás fichas par-par, los números de la ficha faltante aparecen 2 veces, y los otros dos aparecen 3 veces. Estos últimos deben ser los extremos del lado par. Entonces los dos números de la ficha faltante obligan a poner algunas juntas, en el ejemplo, debemos ir juntas $\boxed{2|0}$ $\boxed{0|4}$ y también $\boxed{2|6}$ $\boxed{6|4}$. Junto con la ficha $2\ 4$, tenemos 3 bloques con extremos 2 y 4. Para formar el lado par basta escoger el orden de los 3 bloques y si queremos empezar con 2 o con 4. Por lo tanto, sin mulas, hay $6 \cdot 3!{\cdot}2$ (el primer factor es el número de formas de elegir la ficha faltante) formas de hacer el lado par. Las mulas de los números de los extremos pueden estar en dos posiciones y las mulas de los otros dos números sólo en una. Por lo tanto con todo y mulas hay $(6 \cdot 3! \cdot 2(2 \cdot 2)$ formas de hacer el lado par.
El número total de formas de hacer la hilera de longitud máxima es el producto de las formas de hacer los dos lados (puesto que la ficha par-impar queda determinada). Así que el número de formas buscado es $(6 \cdot 2)(6 \cdot 3! \cdot 2)(2 \cdot 2) = 2^7 3^3$. Si una hilera y la que se obtiene al girarla $180°$ se consideran distintas el número es el doble.
Comentario. Una solución más directa se obtiene haciendo el árbol completo de los casos aprovechando la simetría para reducir el trabajo.

Solución del problema 11. Sean a, b y c tres enteros distintos que forman una terna compatible, y supongamos que a es el mayor de los tres. Notemos que a debe ser múltiplo o divisor de al menos uno de b y c, digamos de b. Como $a > b$, a debe ser múltiplo de b.

Si c también es divisor de a (o de b, lo cual lo vuelve divisor también de a) entonces b y c son a lo más $a/2$ y $a/3$ en algún orden, de modo que $a+b+c \leq \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)a = \frac{11}{6}a$.
Si c no es divisor de a, debe ser múltiplo de b. Si $a = kb$, entonces $c \leq (k-1)b$, porque $a > c$. entonces, $a+b+c \leq a+b+(k-1)b = a+kb = 2a$.
Entonces, en cualquier caso la suma es a lo más $2a$ y sólo llega a eso si la terna es de la forma kb, b, $(k-1)b$. Para las ternas formadas con números del 1 al 2002 la suma máxima es, entonces, 4004 y sólo ocurre para ternas de la forma antes mencionada cuando $kb = 2002$. Factorizando 2002 (es $2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$) encontramos sus divisores, los posibles valores de b. Las ternas son: $\{2002, 1, 2001\}$, $\{2002, 2, 2000\}$, $\{2002, 7, 1995\}$, $\{2002, 11, 1991\}$, $\{2002, 13, 1989\}$, $\{2002, 14, 1988\}$, $\{2002, 22, 1980\}$, $\{2002, 26, 1976\}$, $\{2002, 77, 1925\}$, $\{2002, 91, 1911\}$, $\{2002, 143, 1859\}$, $\{2002, 154, 1848\}$, $\{2002, 182, 1820\}$, $\{2002, 286, 1716\}$. (Nótese que tomar $b = 1001$ no resulta en una terna válida porque los tres números no son distintos).

Solución del problema 12. El cuadrilátero $BCKM$ es cíclico por tener ángulos opuestos rectos. Entonces, $\angle ABK = \angle MBK = \angle MCK = \angle MCD$. Análogamente, $\angle BAK = \angle MDC$, por lo que $\angle ABK + \angle BAK = \angle MCD + \angle MDC = 180° - \angle CMD = 90°$, de donde $\angle AKB$ es recto.
Como el triángulo AKB es rectángulo, el punto medio de AB, M, es el circuncentro de AKB y por lo tanto, $AM = MK$. Entonces, los triángulos rectángulos AMD y KMD tiene un cateto correspondiente igual y comparten la hipotenusa MD, lo cual los hace congruentes. análogamente MKC y MBC son congruentes. En particular, $AD = DK$ y $KC = BC$.
Usando esto hay muchas formas de terminar, aquí presentamos algunas:
Primera Forma. Como los triángulos AKC y ABC comparten el lado AC la razón de sus áreas es la razón de sus alturas sobre el lado AC. La razón de estas alturas es $\frac{KQ}{QB}$(trazando las alturas se forman triángulos semejantes). Por otra parte, los dos triángulos tienen un lado igual, a saber $BC = KC$, por lo que la razón de sus áreas es la razón de las alturas a esos lados. Así que llamando R al pie de la perpendicular desde A a CD, $\frac{KQ}{QB} = \frac{AR}{AB}$. Análogamente, $\frac{KP}{PA} = \frac{BS}{AB}$, donde S es el pie de la perpendicular desde B a CD. como AR, MK y BS son perpendiculares a CD y M es el punto medio de AB, tenemos que $AR + BS = 2MK = AB$, por lo que las fracciones suman uno, como debíamos probar.
Segunda Forma. Sean E el punto de intersección de AC con BD y L el punto sobre la recta CD tal que AL es paralela a BD. Como AD y BC son paralelas,

$\frac{CE}{EA} = \frac{BC}{AD}$. Por el teorema de Tales, $\frac{CE}{EA} = \frac{CD}{DL}$. Entonces,

$$\frac{AD}{DL} = \frac{BC}{CD} = \frac{BC}{AD + BC}.$$

Otra vez por el teorema de Tales,

$$\frac{KP}{PA} = \frac{KD}{DL} = \frac{AD}{DL},$$

de donde

$$\frac{KP}{PA} = \frac{AD}{AD + BC}.$$

Análogamente

$$\frac{KQ}{QB} = \frac{BC}{AD + BC}$$

y las fos fracciones suman uno, como se pedía probar.
Tercera Forma. Sea E el punto de intersección de AC con BD. Por el teorema de Menelao aplicado al triángulo BKD con la recta EQC obtenemos:

$$\frac{KQ}{QB} \cdot \frac{BE}{ED} \cdot \frac{DC}{KC} = 1.$$

Como AD y BC son paralelas, $\frac{BE}{ED} = \frac{BC}{AD}$. Usando esto, que $KC = BC$ y que $CD = AD + BC$, obtenemos que

$$\frac{KQ}{QB} = \frac{BC}{AD + BC}.$$

Ahora terminamos como en la forma anterior.
Otra forma de empezar Finalmente, otra demostración de que AKB es recto y de que $AD = DK$ y $KC = BC$:
Como $\angle AMD + \angle BMC = 180° - \angle CMD = 90°$, los triángulos rectángulos AMD y BCM son semejantes. Ahora, tenemos que

$$\frac{MC}{MD} = \frac{BC}{AM} = \frac{BC}{MB},$$

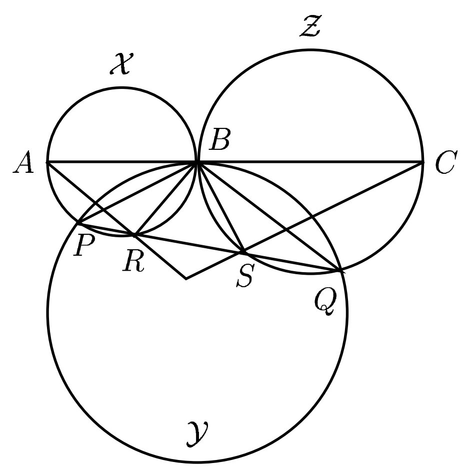
por lo que el triángulo rectángulo MCD también es semejante a AMD y BCM. Como MK es altura de MCD, entonces KMD y KCM también son semejantes a estos triángulos. Como AMD y KMD comparten la hipotenusa, de hecho son congruentes y por lo tanto, $AD = DK$. Análogamente $KC = BC$.

También, como AMD y KMD son congruentes, por simetría, AK es perpendicular a MD y análogamente BK es perpendicular a MC. Si llamamos R y S a las intersecciones de AK con MD y de MC con BK, tres de los ángulos del cuadrilátero $KRMS$ son rectos y por lo tanto el cuarto también.

Solución del problema 13. Supongamos que $m = kt$. Notemos que $10k$ y m coinciden salvo por los dígitos de las decenas y de las unidades. Específicamente, si el dígitos de las unidades de k es a, entonces m termina en $0a$ y $10k$ termina en $a0$. Si $a = 0$, entonces $10k = m$, de modo que todos los k que acaban en 0 cumplen la condición. Supongamos ahora que a no es cero. En este caso, $10k$ (que termina en $a0$) es mayor que m (que acaba en $0a$). Por lo tanto, t es cuando mucho 9. Por otra parte t debe ser mayor que 1 porque $m > k$ (tiene un dígito más, de hecho).
Para cada valor de t encontramos todas las posibilidades para k como sigue: a, el dígito de las unidades de k, debe ser tal que kt también tenga dígitos de las unidades a. Después, encontramos el dígito de las decenas usando que el dígito de las decenas de $m = kt$ es 0, de modo que t por el dígito de las decenas de k más lo que se lleva de calcular at debe terminar en 0. A partir de este momento, cada dígito de k debe ser tal que si se multiplica por t y al producto se le suma lo que se lleve de la posición anterior, el resultado termine en el dígito anterior de k.
Para $t = 2$, 4 y 8 no hay ninún valor de a tal que at termine en a.
Para $t = 6$, a puede ser 2, 4, 6 u 8. Con el procedimiento ya descrito obtenemos los números $X2$, $X34$, $X84$, $X18$ y $X68$, donde las X denotan dígitos para los cuales no queda ninguna posibilidad (o sea que para $t = 6$ la única solución es $k = 18$). Notemos que si después de 18 continuamos con el método, se obtiene $\ldots 00018$, por lo que $k = 18$ realmente es la única solución en este caso.
Para $t = 5$ se obtiene $X5$.
Para $t = 3$ se obtiene $\ldots 28571428571435$ donde el grupo de dígitos 285714 se repite una infinidad de veces. Por lo tanto, no hay solución con $t = 3$.
Para $t = 7$ se obtiene $\ldots 0015$ con el 0 repitiéndose, por lo que la única solución con $t = 7$ es $k = 15$.
Para $t = 9$ se obtiene $\ldots 0045$ con el 0 repitiéndose, por lo que la única solución con $t = 9$ es $k = 45$.
En resumen las soluciones son 15, 18, 45 y los números que terminen en 0.
Segunda Solución. Si b es el dígito de las unidades de k y a es el número formado por los demás dígitos, entonces $k = 10a+b$ y $m = 100a+b$. Supongamos que $m = kt$. Entonces, $100a + b = t(10a + b)$, o sea, $10(10 - t)a = (t - 1)b$.

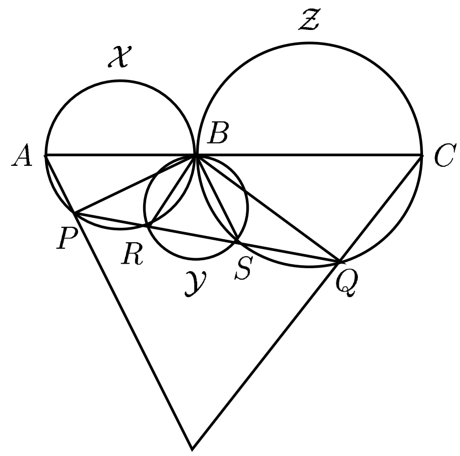
Como $t \geq 1$, el lado derecho es no negativo. Luego, el lado izquierdo también lo es, de donde $t \geq 10$. Si t fuera 1, tendríamos $a = 0$, lo cual es absurdo pues k tiene dos o más dígitos. Si $t = 10$, entonces $b = 0$ y todos estos valores de k cumplen.
Ahora $(t-1)b$ debe ser múltiplo de 10 y $t-1$ no puede ser múltiplo de 10 (t está entre 2 y 9). Por lo tanto, b debe ser par, múltiplo de 5, o ambos. Si es ambos, $b = 0$ y esos valores ya los conocíamos.
Si $b = 5$, la ecuación se simplifica a $2(10-t)a = t-1$. Entonces, $2(10-t) \leq t-1$, o sea, $t \geq 7$. Como $t-1$ es par, t debe ser 7 ó 9. Para $t = 7$ obtenemos $a = 1$ y la solución $k = 15$. Para $t = 9$ obtenemos $a = 4$ y la solución $k = 45$.
Si b es para (distinto de 0), $t-1$ debe ser múltiplo de 5. Por lo tanto, $t = 6$. La ecuación se simplifica a $8a = b$, como b es un dígito, la única solución es $a = 1$ y $b = 8$, o sea, $k = 18$.
En resumen, las soluciones son los múltiplos de 10, y también los números 15, 45 y 18.

Solución del problema 14. Sea T la interseccion de AR con CS. Probaremos que T está sobre la tangente común a $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Z}$ probando que el ángulo ABT es recto. Como AB es diámetro de $\mathcal{X}$, $\angle BRT$ es recto. COmo BC es diámetro de $\mathcal{Z}$, $\angle BST$ es recto. Por lo tanto el cuadrilátero $BRST$ es cíclico.

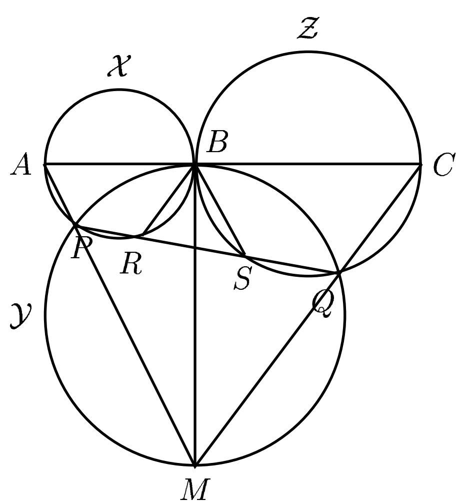


Si R y S están en P y Q, tenemos que $\angle RBT = \angle RST = \angle CSQ = \angle CBQ = \angle BPQ = \angle BAR$ (la primer igualdad ocurre porque $BRST$ es cíclico, la segunda porque los ángulos son opuestos por el vértice, la tercera porque $BSQC$ es cíclico,

la cuarta porque BC es tangente a $\mathcal{Y}$, y la última porque $APBR$ es cíclico).
Si P y Q están en R y S es muy parecido: $\angle RBT = \angle RST = 180° - \angle CSQ = \angle CBQ = \angle BPQ = 180° - \angle BPR = \angle BAR$.
En cualquier caso, $\angle RBT = \angle BAR$. Como $\angle BAR + \angle ABR = 90°$, entonces $\angle RBT + \angle ABR = 90°$, o sea $\angle ABT = 90°$.



Segunda Solución. Sea M el punto diametralmente opuesto a B en $\mathcal{Y}$. Como AB es diámetro de $\mathcal{X}$, el ángulo APB es recto. Como BM es diámetro de $\mathcal{Y}$, el ángulo BPM es recto. Por lo tanto, A, P y M son colineales. Análogamente, C, Q y M son colineales. Probaremos que AR, CS y la tangente común concurren viendo que son alturas del triángulo ACX.



Para ver que AR es perpendicular a CM bastaría ver que BR y CM son paralelas. Tenemos que $\angle ABR = \angle QPM = \angle QBM = \angle BCQ$ (la primera igualdad es porque $APRB$ es cíclico, la segunda porque $BPMQ$ lo es y la última porque BM es tangente a $\mathcal{Z}$). Por lo tanto, AR es altura de ACM. Análogamente, CS es altura del triángulo y claramente BM es altura. Por lo tanto, AR, CS y BM concurren.

Solución del problema 15. Son los valores de a y b que cumplen que $a+b > n$. Probemos primero que $a + b > n$, entonces forzosamente hay un muchacho y una muchacha que se gustan mutuamente:
Primera Forma. Supondremos que no hay dos que se gustan mutuamente y demostraremos que $a + b \leq n$. A cada quien le preguntamos quienes le gustan y hacemos una lista de parejas en als que alguno de los dos le gusta al otro. Como no hay dos que se gusten mutuamente, al hacer así la lista no obtenemos parejas repetidas. Por lo tanto, obtenemos a lo más n^2 parejas en la lista. Por otra parte, por cada muchacha obtenemos a parejas y por cada muchacho b, de modo que obtenemos exactamente $an + bn = (a + b)n$ parejas. Entonces, $(a + b)n \leq n^2$ de donde $a + b \leq n$.
Segunda Forma. Este es realmente el mismo argumento que el anterior dicho de otro modo. Numeramos los muchachos y las muchachas con los números del 1 al n, y hacemos una tabla $n \times n$ en la que el cuadro en el renglón i y la columna j, lo pintamos de rojo si a la muchacha i le gusta el muchacho j, de azul si la muchacha i le gusta al muchacho j, y lo dejamos sin pintar en otro caso. Si no hay dos que se gusten mutuamente, ninguna casilla se pinta tanto de rojo como de azul. En cada renglón hay a casillas rojas y en cada columna hay b casillas azules, de modo que en total hay $(a+b)n$ casillas pintadas. Por lo tanto, $(a + b)n \leq n^2$, o sea, $a + b \leq n$.
Tercera forma. Supongamos que $a + b > n$. Como a cada muchacha le gustan a muchachos, en total hay an "gustos"de parte de las muchachas. Entonces, a algún muchacho le tocan al menos a "gustos", es decir, hay algún muchacho popular que le gusta a al menos a muchachas. Como al muchacho popular le gustan b muchachcas y $a+b > n$, no pueden ser todas distointas las a muchachas a las que le gusta y las b que le gustan a él. Por lo tanto, hay una muchacha que le gusta a y a quien le gusta el muchacho popular.

Ahora probaremos que si $a + b \leq n$ puede suceder que no haya una muchacha y un muchacho que se gusten mutuamente.

Primera Forma. Numeramos los muchachos y las muchachas con los números del 1 al n. Imaginemos que a la muchacha i le gustan los muchachos i, $i+1$,..., $i+a-1$ (los números se toman módulo n) y que al muchacho j le gustan las muchachas $j+1, j+2, \ldots, j+b$. En este caso no hay dos que se gusten mutuamente. En efecto, si a la muchacha i le gusta el muchacho j, j debe ser uno de i, $i+1, \ldots, i+a-1$, digamos $i+t$. Entonces, al muchacho j le gustan las muchachas $i+t+1, i+t+2, \ldots, i+t+b$. El primero de eso números es al menos $i+1$ y el último es a lo más $i+a+b-1 \leq i+n-1$, o sea que ninguno es i (o $i+n$).

Segunda Forma. Por lo que se vió en la segunda forma de la primera parte, basta pintar una cuadrícula de manera que haya a cuadros rojos en cada renglón y b azules en cada columna. Empezamos pintando los primeros a cuadros del primer renglón de rojo. El segundo renglón lo hacemos como el primero con los cuadros rojos recorridos un lugar a la derecha. El tercero es el segundo recorrido, etc. Cuando a la hora de recorres un cuadro rojo se salga por el borde de la cuadrícula lo pasamos al principio de su renglón. Obtenemos una cuadrícula con a cuadros rojos en cada renglón y $n-a$ cuadros vacíos en cada columna. Como $n-a \geq b$ podemos simplemente elegir b cuadros de cada columna y pintarlos de azul.

Tercera Forma. Elegimos $a+b$ números distintos entre 1 y n, digamos $r_1, r_2, \ldots,$ $r_a, s_1, s_2, \ldots, s_b$. Imaginemos una fiesta donde a la muchacha i le gusta el muchacho j si $i-j$ es congruente módulo n con algún r_k, y al muchacho j le gusta la muchacha i si $i-j$ es congruente módulo n con un s_k. Así es fácil ver que a cada muchacha le gustan a muchachos: a la muchacha i le gustan los muchachos $i-r_1$, $i-r_2, \ldots, i-r_a$ (módulo n). Análogamente, a cada muchacho le gustan b muchachas. Además, no hay dos que se gusten mutuamente pues si $i-j$ es congruente con a lo más uno de los $a+b$ números $r_1, r_2, \ldots, r_a, s_1, s_2, \ldots, s_b$.

Solución del problema 16. Primero probaremos que MN es paralela a AB y a DC. Los triángulos APM y QDM son semejantes, de donde $\frac{PM}{MD} = \frac{AP}{DQ}$. También son semejantes PBN y CQN, de donde $\frac{PN}{NC} = \frac{PB}{QC}$. Pero por hipótesis, $\frac{AP}{PB} = \frac{DQ}{QC}$, así que $\frac{PM}{MD} = \frac{PN}{NC}$ y por el teorema de Thales, MN es paralela a DC.

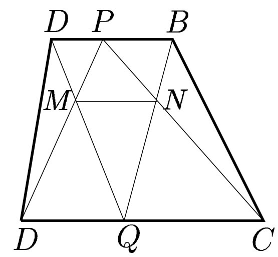
Hay muchas formas de concluir, presentamos dos.

Entonces, los triángulos PMN y PDC son semejantes, de donde

$$\frac{DC}{MN} = \frac{DP}{MP} = 1 + \frac{DM}{MP} = 1 + \frac{DQ}{AP} = 1 + \frac{DC}{AB}.$$

Aquí, la última igualdad ocurre porque P divide al segmento AB en la misma razón que Q divide a DC. De aquí, despejamos

$$MN = \frac{AB \cdot DC}{AB + DC}.$$



Alternativamente, de la semejanza de los triángulos PMN y PDC obtenemos $\frac{MN}{DC} = \frac{PM}{PD}$ y de la semejanza de los triángulos QMN y QAB obtenemos que $\frac{MN}{AB} = \frac{MQ}{AQ}$. Por el teorema de Thales, $\frac{MQ}{AQ} = \frac{MD}{PD}$. Entonces, $\frac{MN}{DC} + \frac{MN}{AB} = \frac{MP}{PD} + \frac{DM}{PD} = 1$, de donde podemos despejar otra vez MN.

Solución del problema 17. Si el primer jugador empieza eligiendo la tarjeta $(1, p)$ con p primo, pierde el jugador que no tome una tarjeta que incluya un múltiplo de p (pues en ese momento el máximo común divisor pasa de p a 1). Si la cantidad de tarjetas que incluyen un múltiplo de p es impar (incluyendo la tarjeta $(1, p)$), al primer jugador le toca la última de ellas y gana. Desafortunadamente, $p = 2$ no cumple: el número de tarjetas con al menos un número par es igual al total de parejas menos el número de parejas con ambos impares, esto es, $\binom{2003}{2} - \binom{1002}{2} = 2003 \cdot 1001 - 501 \cdot 1001$ que es par. Pero $p = 3$ si cumple: como hay 1336 números entre 1 y 2003 que no son múltiplos de 3, hay $\binom{2003}{2} - \binom{1336}{2} = 2003 \cdot 1001 - 668 \cdot 1335$ parejas, donde al menos uno de los números es múltiplo de 3, y ese número es impar.
Se puede verificar que esta estrategia funciona para los siguientes valores de p: 3, 7, 11, 13, 23, 37, 43, 47, 73, 89, 101, 103, 107, 109, 127, 131, 137, 139, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 503, 509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683, 691, 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787, 797, 809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877, 881, 883, 887, 907, 911, 919, 929, 937, 941, 947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997.

Solución del problema 18. Primero veamos que no importa el orden en el que se efectuen los dos tipos de cambio sensato: en un orden tenemos $n \to 2n+1 \to 3(2n+1)+2 = 6n+5$, en el otro $n \to 3n+2 \to 2(3n+2)+1 = 6n+5$. Entonces, al hacer una serie de cambios sensatos, podemos hacer primero todos los del tipo $n \to 2n+1$ y después todos los del tipo $n \to 3n+2$.
¿Qué se obtiene si a n se le aplican k cambios sensatos del tipo $n \to 2n+1$? Calculemos los primeros pasos: $n \to 2n+1 \to 4n+3 \to 8n+7 \to 16n+15 \to \ldots$. Después de k cambios se obiene $2^k n + 2^k - 1$.
Análogamente, si a n se le aplican k cambios sensatos del tipo $n \to 3n+2$ se obtiene $3^k n + 3^k - 1$.
Ahora, podemos determinar cuándo dos números a y b son compatibles: según lo anterior, si c se obtiene con cambios sensatos a partir de a, usando j del primer tipo y k del segundo, entonces $c = 3^k(2^j a + 2^j - 1) + 3^k - 1 = 2^j 3^k(a+1) - 1$. Análogamente, si c se obtiene a partir de b, c se puede escribir como $c = 2^r 3^s(b+1) - 1$. Igualando, $2^j 3^k(a+1) = 2^r 3^s(b+1)$. Recíprocamente, si existen números j, k, r y s que cumplan la última igualdad, a y b son compatibles (pues si a a le hacemos j cambios del tipo $n \to 2n+1$ y k del tipo $n \to 3n+2$ obtenemos el mismo resultado que si a b le hacemos r cambios del tipo $n \to 2n+1$ y s del tipo $n \to 3n+2$).
Así que para que a se compatible con 2003, debemos tener, para algunos números, j, k, r y s, que $2^j 3^k(a+1) = 2^{r+2}3^{s+1} \cdot 167$, es decir, $a = 2^{r+2-j}3^{s+1-k} \cdot 167 - 1$. Por lo tanto, los números buscados son los de la forma $a = 2^l 3^m \cdot 167 - 1$ que son menores que $2003 = 12 \cdot 167 - 1$. Los números de la forma $2^l 3^m$ menores que 12 son 1, 2, 3, 4, 6, 8 y 9, por lo que los números buscados son 166, 333, 500, 667, 1001, 1335 y 1502.
Segunda Solución. Supongamos que c se obtiene a partir de a con cambios sensatos y escribamos la lista de los números intermedios que se obtienen con los cambios sensatos: $a \to x \to y \to \ldots \to c$, donde $x = 2a+1$ ó $3a+2$, $y = 2x+1$ ó $3x+2$, etc. Si le sumamos uno a cada número de la lista, obtenemos otra listas $a+1 \to x+1 \to y+1 \to \ldots \to c+1$, en la que $x+1 = (2a+1)+1 = 2(a+1)$ ó $(3a+2)+1 = 3(a+1)$, es decir, el segundo número es el doble o el triple del anterior. Consideremos ahora la factorización de $a+1$ como producto de potencias de primoes distintos. La factorización de $c+1$ tiene las mismas potencias de los primos que no son ni 2, ni 3; y del 2 y el 3 puede tener cualquier potencia que sea mayor o igual que la que aparece en la factorización de $a+1$.
Por lo tanto, a y b con compatibles si y sólo si las factorizaciones de $a+1$ y $b+1$ tienen las mismas potencias de todos los primos que no son ni 2, ni 3. Como $2003+1 = 2^2 \cdot 3 \cdot 167$, los compatibles con 2003 son los de la forma $2^l 3^m \cdot 167 - 1$.

De éstos, los menores que 2003 son los que tienen 2^l3^m12. Los valores posibles son $2^l3^m = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9$, por lo que los números buscados son 166, 333, 500, 667, 1001, 1335 y 1502.

Bibliografía

[1] Comité Organizador de la Olimpiada Matemática Mexicana, *Olimpiada de Matemáticas, 140 problemas*. Academia de la Investigación Científica, México 1993.

[2] Bulajich R.& Gómez Ortega J.A., *Geometría*, Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas, Instituto de Matemáticas, UNAM, 2002.

[3] E. Gentile, *Aritmética Elemental*, Monografía No. 25 de la Serie de Matemáticas del Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico de la OEA. Ediciones de la OEA, 1988.

[4] R. Grimaldi, *Matemáticas Discreta y Combinatoria*. Addison-Wesley Iberoamericana, México 1989.

[5] V. Gusiev, V. Litvinenko, A. Mordkovich, *Prácticas para Resolver Problemas de Matemáticas, (Geometría)*. Editorial Mir, Moscú 1969.

[6] Illanes A., *Principios de olimpiada*, Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas, Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2001.

[7] V. Litvinenko, A. Mordkovich, *Prácticas para Resolver Problemas de Matemáticas, (Algebra y Trigonometría)*. Editorial Mir, Moscú 1989.

[8] Pérez Seguí M.L., *Combinatoria*, Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas, Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2000.

[9] Pérez Seguí M.L., *Teoría de Números*, Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas, Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2003.

[10] I. Niven, H. Zuckerman, *Introducción a la Teoría de los Números*. Limusa-Wiley, México 1972.

[11] H. Shariguin, *Problemas de Geometría*, Colección Ciencia Popular. Editorial Mir, Moscú 1989.

[12] N. Vilenkin, *¿De Cuántas Formas? (Combinatoria)*. Editorial Mir, Moscú 1972.

COMITÉ ORGANIZADOR DE LA OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMATICAS

Radmila Bulajich
(Presidenta)

Ana Alberro Semerena

Ignacio Barradas Bribiesca

Jesús Jerónimo Castro

Martín Eduardo Frías Armenta

José Antonio Gómez Ortega

Alejandro Illanes Mejía

Carmen Sosa Garza