PRUEBA DE ENTRENAMIENTO 1

Los estudiantes de 10 deben resolver los problemas 1, 2, 3, 5 y 7.
Los estudiantes de 11 y 12 deben resolver los problemas 1, 2, 4, 6 y 8.

1. En un torneo de fútbol hay 20 equipos cada uno de los cuales juega exactamente una vez con cada uno de los demás equipos. En cada partido el ganador obtiene 3 puntos, mientras que el perdedor no obtiene puntos y en caso de empate cada uno obtiene 1 punto.
a). Al final del torneo se suman los puntos obtenidos por todos los equipos. ¿Cuáles son todos los posibles valores de este total?
b). Al final del torneo el equipo campeón obtuvo *p* puntos. ¿Cuáles son todos los posibles valores que puede tener p?

2. Encontrar el número de formas de escribir enteros no negativos en cada casilla de un tablero de nxn, de modo que la suma de los números en cada fila y cada columna es igual a 3 y en cada fila y en cada columna sólo puede haber 1 ó 2 números diferentes de 0.

3. Sean x_1, x_2, x_3, raíces de la ecuación cúbica $4x^3 - 15x^2 - 15x - 30 = 0$. Demostrar que la expresión $\frac{x_1^3}{x_1^2 + x_1 + 2} + \frac{2x_2^3}{x_2^2 + x_2 + 2} + \frac{4x_3^3}{x_3^2 + x_3 + 2}$ no cambia al intercambiar los valores de x_1, x_2, x_3 en cualquier forma.

4. Sea $Q_n = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$, demostrar que $\frac{1}{2\sqrt{n}} < Q_n < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

5. Sea ABCD un rectángulo tal que AB = 1 cm y BC = 2 cm. Sea K el punto medio de AD.
a). Encontrar la razón en la que se cortan los segmentos BK y AC.
b). Sean L el punto de intersección de AC con BK, M y N los puntos medios de BK y AC respectivamente. Encontrar el área del triángulo LMN.

6. En un segmento de recta AB ubicamos un punto C cualquiera y trazamos tres circunferencias tal que la primera tiene como diámetro a AB, la segunda a AC y la tercera a CB. En C levantamos una perpendicular que corta al arco AB en D. Demostrar que la circunferencia tangente a los arcos AB, AC y a la recta CD es igual a la circunferencia tangente a los arcos AB, BC y a la recta CD.

7. Sea S el subconjunto del conjunto {1, 2, …, 1989} tal que dos elementos de S no difieren por 4 ni por 7. ¿Cuál es el mayor número de elementos que S puede tener?

8. Para cada entero positivo n, se define $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$, $T_n = S_1 + S_2 + ... + S_n$; $U_n = T_1 + T_2 + ... + T_n$. Hallar enteros $0 < a, b, c, d < 10^6$ tales que

$$T_{1988} = aS_{1989} - b \quad \text{y} \quad U_{1988} = cS_{1989} - d.$$

SOLUCIONES

1. a). Sean T la suma de todos los puntajes de todos los equipos al final del torneo, G el total de partidos en los cuales hubo ganador y E el total de partidos en los cuales los equipos empataron. Como cada uno de los partidos con ganador suma 3 puntos a T y cada uno de los partidos, en los cuales hubo empate suma 2 puntos a T, entonces T = 3G + 2E = 2(G + E) + G. Ahora G + E es el total de partidos jugados. Cada uno de los 20 equipos juega exactamente una vez con cada uno de los otros 19 equipos, por lo tanto en total se juegan $\frac{20\cdot 19}{2}$ = 190 partidos. Luego T = 2(G + E) + G = 2·190 + G = 380 + G. Como G puede tomar cualquier valor entero entre 0 y 190 entonces T puede tomar cualquier valor entero entre 380 y 380 + 190 = 570.

b). Supongamos que el equipo campeón C ganó g partidos y empató e partidos. Entonces su puntaje es P = 3g + e. Cada equipo juega exactamente 19 partidos, entonces el mayor valor que puede tener P es 3·19 = 57. Si C empata todos los partidos entonces su puntaje es P = 19. En este caso es C campeón si, por ejemplo, todos los 190 partidos jugados en el torneo terminan en empate, en cuyo caso todos los equipos obtienen 19 puntos. Si P < 19 entonces la suma total de todos los puntajes de todos los equipos debe ser menor que 19·20 = 380. Pero en la parte a) demostramos que T $\geq$ 380, lo cual es una contradicción. Luego 19 $\leq$ P $\leq$ 57.

Supongamos que C no pierde ningún partido, en este caso $g + e = 19$ y P = 3g + e = 19 + 2g. Como P es impar en este caso P $\neq$ 56. Si C pierde algún partido, P alcanza su máximo valor cuando C gana 18 partidos y pierde uno, en cuyo caso P = 18·3 = 54. Esto significa que en ningún caso P puede ser 56. Demostremos que P puede ser cualquier entero entre 19 y 57, excepto 56. Para ello consideremos dos casos:

- C no perdió ningún partido, entonces P = 19 + 2g. Como g es cualquier entero entre 0 y 19 entonces P puede tomar cualquier valor entre 19 y 57. Veamos que para cada uno de estos valores existe un torneo en el cual C fue campeón. Supongamos que cada uno de los otros 19 equipos empató con cada uno de ellos, entonces sin tener en cuenta el partido jugado con C su puntaje es de 18 puntos. Ahora, como Con perdió con ninguno de ellos entonces todos los puntajes de estos 19 equipos al final del torneo son 18 ó 19 puntos. Como P $\geq$ 19, entonces C es el campeón.
- C perdió exactamente un partido. Entonces P = 18 + 2g, como g es cualquier entero entre 0 y 19 entonces P puede tomar cualquier valor par entre 20 y 54 por ser 19 $\leq$ P. Veamos que para cada uno de estos valores existe un torneo en el cual C fue campeón. Enumeremos los equipos del 1 al 20, con C = 1. Supongamos que el equipo k le ganó al equipo k – 1 para k = 2, 3, …, 20 y que todos los demás partidos jugados por los equipos distintos de C se empataron. Entonces sin tener en cuenta el partido jugado con 1 tenemos que 2 tiene 17 puntos, 3, 4, …, 19 tienen 19 puntos y 20 tiene 20 puntos. Vamos a suponer que 1 le ganó a 20, entonces 20 también tiene 20 puntos. Finalmente en cada uno de los partidos jugados entre 1 y los equipos restantes no puede perder 1, por lo tanto estos equipos no pueden obtener más de 20 puntos. Como P $\geq$ 20 entonces C es el campeón.

2. Consideremos una permutación cualquiera de los números 1, 2, …, n. Ahora a la fila k del tablero de nxn le asignamos el número correspondiente de la permutación. Si a la k-ésima fila le corresponde el número k entonces colocamos en la k-ésima casilla de la fila (la casilla de la diagonal) un 3. En cambio, si a la k-ésima fila le corresponde el número i $\neq$ k entonces colocamos en la k-ésima casilla de la fila (la casilla de la diagonal) un 1 y en la i-ésima casilla un 2. Fácilmente se verifica que el tablero así construido satisface las condiciones del problema. El siguiente tablero de 5x5 es un ejemplo que muestra lo que se obtiene para la permutación (2,4,3,5,1).

					Permutación
1	2	0	0	0	2
0	1	0	2	0	4
0	0	3	0	0	3
0	0	0	1	2	5
2	0	0	0	1	1

Notemos que:

- Cualquier permutación de las columnas genera un tablero que también satisface las condiciones, puesto que las sumas sobre las filas y las columnas seguirán siendo 3 bajo esta transformación.

- A). Y cualquier tablero que satisface las condiciones se puede obtener de una permutación de las columnas de un tablero tal que cada una de las casillas de la diagonal contiene un 3 o un 1 al cual se le puede asociar una permutación de los números 1, 2, …, n.

Como hay n! permutaciones de los números 1, 2, …, n y n! permutaciones de las columnas entonces el número de formas buscado es n!xn! = $(n!)^2$.

3. Para i = 1, 2, 3 se sigue de la ecuación dada que $\dfrac{x_i^3}{x_i^2 + x_i + 2} = \dfrac{15}{4}$. Por lo tanto,

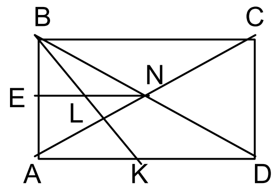
$\sum \dfrac{2^{i-1} + x_i^3}{x_i^2 + x_i + 2} = \dfrac{15}{4}(1+2+4) = \dfrac{105}{4}$, que es constante.

4. Para $r \geq 2$, se tiene $\dfrac{\sqrt{r-1}}{\sqrt{r}} < \dfrac{2r-1}{2r} < \dfrac{\sqrt{3r-2}}{\sqrt{3r+1}}$, lo cual se demuestra simplemente elevando al cuadrado. Así obtenemos:

r = 2 $\quad \dfrac{1}{\sqrt{2}} < \dfrac{3}{4} < \dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{7}}$; r = 3 $\quad \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} < \dfrac{5}{6} < \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{10}}$, ….; r = n $\quad \dfrac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} < \dfrac{2n-1}{2n} < \dfrac{\sqrt{3n-2}}{\sqrt{3n+1}}$.

Multiplicando estas desigualdades, se dan productos telescópicos en ambos extremos y se obtiene

$\dfrac{1}{\sqrt{n}} < \dfrac{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots \cdot (2n-1)}{4 \cdot 6 \cdot 8 \ldots \cdot 2n} < \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3n+1}}$, de donde $\dfrac{1}{2\sqrt{n}} < Q_n < \dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}$.



5. a). Consideremos el triángulo ABD. Como AC y BD son las diagonales de ABCD entonces se intersecan en N su punto medio. Tenemos entonces que AN y BK son medianas del triángulo ABD y L su punto de intersección, es el centroide, entonces BL:LK = AL:LM = 2. Finalmente, como CN = AN entonces BL:LK = CL:LA = 2.

b). En el triángulo BKD tenemos que N y M son puntos medios de dos de sus lados, por lo que NM = ½ KD = ½. Sea E el punto de intersección de la recta MN con AB, E es el punto medio de AB. Entonces, si LH es altura del triángulo LMN tenemos que LH:EA = LM:AM = $\dfrac{1}{3}$, de donde LH = $\dfrac{1}{3}$AE = $\dfrac{1}{6}$. Se sigue que el área del triángulo LMN es $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{24}$.

6. Consideremos la circunferencia con centro E y radio x tangente al arco grande AB, a la recta tangente CD y al arco pequeño AC con radio r_1. Imaginemos el triángulo rectángulo EFQ formado al trazar la perpendicular EF desde E al diámetro AB, y donde Q es el centro de la circunferencia de radio r_1. Notemos que cos EQF = $\dfrac{QF}{Qe} = \dfrac{r_1 - x}{r_1 + x}$.

Sea r el radio de la semicircunferencia con diámetro AB y P el punto medio de AB (centro de la semicircunferencia). Aplicando la ley de los cosenos en el triángulo EPQ, tenemos

$$(r - x)^2 = (r_1 + x)^2 + (r - r_1)^2 - 2(r_1 + x)(r - r_1)\frac{r_1 - x}{r_1 + x}.$$

Hasta el momento no hemos dicho nada acerca de la otra semicircunferencia pequeña. Veamos, si su radio es r_2 podemos volver a escribir lo anterior como sigue $(r - x)^2 = (r_1 + x)^2 + r_2^2 - 2r_2(r_1 - x)$. Expandiendo y simplificando, teniendo en cuenta que $r = r_1 + r_2$, obtenemos

$r^2 - 4rx = (r_1 - r_2)^2$ o x = $\dfrac{(r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2}{4r} = \dfrac{r_1 r_2}{r}$. Como esto es simétrico para r_1 r_2 concluimos que las áreas de los dos círculos y por tanto de los círculos mismos son iguales.

7. Mostraremos primero que en cualquier conjunto de 11 enteros consecutivos tomados del conjunto {1, 2, …, 1989}, a lo sumo 5 de los 11 números pueden ser elementos de S. Demostraremos esto para el conjunto T = {1, 2, …, 11} , pero la misma demostración se tiene para cualquier conjunto de 11 enteros consecutivos. Consideremos la siguiente partición de T en la cual cada subconjunto formado puede contribuir a lo sumo un elemento a S. {1, 5}; { 2, 9}; {3, 7}; {4,11}; {6,10}; {8} (I)

Si fuera posible que 6 elementos de T pertenecieran a S, entonces cada uno de los conjuntos en (I) tendría que contribuir exactamente un elemento. Pero esto es imposible según las condiciones del problema tal como se demuestra enseguida.

$8 \in S \Rightarrow 1 \notin S \Rightarrow 5 \in S \Rightarrow 9 \notin S \Rightarrow 2 \in S \Rightarrow 6 \notin S \Rightarrow 10 \in S \Rightarrow 3 \notin S \Rightarrow 7 \in S \Rightarrow 11 \notin S \Rightarrow 4 \in S \Rightarrow 8 \notin S$.

Con la ayuda de (I), o de otra manera, es fácil encontrar un subconjunto de T con 5 elementos que satisface las propiedades que define S. Un tal conjunto es T´ = {1, 3, 4, 6, 9}. Encontramos además que T´ tiene la propiedad de permitir continuación periódica. Es decir, si Z denota el conjunto de los enteros, entonces el conjunto $Z' = \{k + 11n | k \in T', n \in Z\}$, también tiene la propiedad de que ningún par de sus elementos difiere por 4 o por 7. Además, dado que $1989 = 180\cdot 11 + 9$, está claro que S no puede tener más de $181\cdot 5 = 905$ elementos. Ya que el mayor elemento en T´ es 9, se tiene que el conjunto $S = S' \cap \{1, 2, \dots, 1989\}$ tiene 905 elementos, 0 sea, que la cota superior de 905 puede realizarse.

8. Busquemos fórmulas sencillas que permitan expresar T_n y U_n en términos de S_{n+1}. En primer lugar tenemos:

$$
\begin{aligned}
T_n = 1 & \\
&+ (1 + \tfrac{1}{2}) \\
&+ (1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}) \\
&+ \dots\dots \\
&+ \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{n}{1}+\frac{n-1}{2}+\frac{n-2}{3}+\dots+\frac{1}{n} = \left(\frac{n+1}{1}-\frac{1}{1}\right)+\left(\frac{n+1}{2}-\frac{2}{2}\right)+\left(\frac{n+1}{3}-\frac{3}{3}\right)+\dots\dots+\left(\frac{n+1}{n}-\frac{n}{n}\right)
\end{aligned}
$$

$$= (n + 1) + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}\right) - \left(1+\frac{2}{2}+\frac{3}{3}+\dots+\frac{n}{n}\right) = (n + 1)(S_{n+1} - \frac{1}{n+1}) - n = (n + 1)S_{n+1} - (n + 1)$$

por otra parte, ya que $\frac{T_n}{n+1} = S_{n+1} - 1$, tenemos

$$U_n = \frac{T_1}{2}+\frac{T_2}{3}+\frac{T_3}{4}+\dots+\frac{T_n}{n+1} = (S_2 - 1) + (S_3 - 1) + (S_4 - 1) \dots + (S_{n+1} - 1) = (S_2 + S_3 + \dots + S_{n+1}) - n$$

$$= (-S_1 + T_n + S_{n+1}) - n = (-1 + [(n + 1)S_{n+1} - (n + 1)] + S_{n+1}) - n = (n + 2)S_{n+1} - (2n + 2).$$

$\therefore\ T_{1988} = 1989\cdot S_{1989} - 1989$ y $U_{1988} = 1990\cdot S_{1989} - 3978$.

Teniendo que (a,b,c,d) = (1989,1989,1990,3978).