PRUEBA DE ENTRENAMIENTO 2

Los estudiantes de OCM deben resolver los problemas 1, 4, 6, 8, 9 y 10.
Los estudiantes de IMO y OIM deben resolver los problemas 1, 3, 7, 8, 9 y 10.
El resto de los estudiantes deben resolver la 2, 5, 6, 8, 9 y 10.

1. Considera la inecuación $\left|x^2 - 5x + 6\right| \leq x + a$, donde a es un parámetro real.

a) Resuelve la inecuación para a = 0
b) Determina todos los valores de a para los cuales la inecuación tiene exactamente 3 soluciones enteras.

2. Probar que $\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+...+\sqrt{1+\frac{1}{2004^2}+\frac{1}{2005^2}} = 2005 - \frac{1}{2005}$.

3. Determina todos los números de 4 dígitos m, menores que 2005, para los cuales existen números naturales n < m, tal que m – n tienen como máximo 3 divisores naturales y m·n es un cuadrado perfecto.

4. Resolver en números enteros la ecuación: $z^2 + 1 = x\,y\,(x\,y + 2\,y - 2\,x - 4)$

5. Los puntos M y N están en el lado AB del triángulo ABC y M está entre A y N. La recta que pasa por M y es paralela a AC intercepta al circuncírculo de MNC en P y la recta trazada por M paralela a NC intercepta al circuncírculo de AMC en Q. Análogamente, la recta trazada por N paralela a BC intercepta al circuncírculo de MNC en K y la recta trazada por N paralela a MC intercepta al circuncírculo de BNC en L.
a). Prueba que P, Q, C son colineales
b). Prueba que P, Q, K, L son concíclicos si y sólo si AM = BN

6. Sea ABC un triángulo cuyo excírculo al lado AB es tangente a la circunferencia de diámetro BC. Determina $\angle$ACB si las longitudes de los lados BC, CA y AB, en ese orden forman una progresión aritmética.

7. Sea S un punto en el lado AB del triángulo acutángulo ABC, P y Q son los centros de las circunferencias circunscritas a los triángulos ASC y BSC. Determina la posición del punto S sobre el lado AB tal que el área del triángulo PQS es mínima.

8. En una escuela hay b profesores y c estudiantes. Suponga que
i). Cada profesor enseña exactamente a k estudiantes; y
ii). Para cada par de estudiantes diferentes, exactamente h profesores enseñan a ambos. Mostrar que $\frac{b}{h} = \frac{c(c-1)}{k(k-1)}$.

9. Demostrar que cualquier triángulo equilátero se puede dividir en *n* triángulos equiláteros, para cualquier n > 5.

10. Sea **n** un número natural. Se tiene un rectángulo de 3xn, cuadriculado en cuadraditos de 1x1. Denominemos "*puntos de la cuadrícula*" a los puntos donde se cortan dos líneas del cuadriculado, o una línea del cuadriculado con un lado del rectángulo, o dos lados del rectángulo. Si se cuentan todos los cuadrados de todos los tamaños posibles que tienen sus cuatro vértices en puntos de la cuadrícula, se obtienen 950 cuadrados. Hallar el valor de **n**.

SOLUCIONES

1. a). Si x $\in(-\infty, 2] \cup [3, \infty)$, la inecuación es equivalente a $x^2 - 6x + 6 \leq 0$, dando que x $\in \left[3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3}\right]$, por tanto las soluciones en este caso son x $\in \left[3-\sqrt{3}, 2\right] \cup \left[3, 3+\sqrt{3}\right]$. Si x $\in (2, 3)$, la inecuación es equivalente a $x^2 - 4x + 6 \geq 0$, la cual se satisface para todos los x en el intervalo dado. Por tanto x $\in \left[3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3}\right]$.

b). Si $\left|x^2 - 5x + 6\right| \leq x + a$ tiene exactamente tres soluciones enteras entonces tiene tres soluciones enteras en $(-\infty, 2] \cup [3, \infty)$. En ese conjunto la inecuación es equivalente a $x^2 - 6x + 6 - a \leq 0$. El discriminante es no negativo para $a \geq -3$ y entonces x $\in \left[3-\sqrt{a+3}, 3+\sqrt{a+3}\right]$, este intervalo es simétrico con respecto a 3 e incluye el 3. Por tanto contiene 3 enteros cuando $1 \leq \sqrt{a+3} < 2$, por tanto si a $\in [-2, 1)$.

2. Observemos que $1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} = \left(\frac{k^2+k+1}{k(k+1)}\right)^2$ y

$\sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}} = \frac{k^2+k+1}{k(k+1)} = 1 + \frac{1}{k(k+1)} = 1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Teniendo finalmente que

$$\sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \ldots + \sqrt{1 + \frac{1}{2004^2} + \frac{1}{2005^2}}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(1 + \frac{1}{2004} - \frac{1}{2005}\right) = 2004 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2005} = 2005 - \frac{1}{2005}.$$

3. Si m – n tiene cuando mas 3 divisores, entonces $m - n = p^k$, donde p es un número primo y $k \in \{0, 1, 2\}$. Cuando k = 0 entonces n(n + 1) es un cuadrado perfecto lo cual es imposible.
Sea $m - n = p^k$, $m n = t^2$, donde $k = \{1, 2\}$, t es un número natural.
Entonces $n(n + p^k) = t^2 \Leftrightarrow (2n + p^k - 2t)(2n + p^k + 2t) = p^{2k}$.
Por tanto $2n + p^k - 2t = p^s$ y $2n + p^k + 2t = p^r$, donde r y s son enteros, $0 \leq s < r \leq 2k$ y $r + s = 2k$.
Si k = 1, la única solución está dada por $2n + p^k - 2t = 1$, $2n + p^k + 2t = p^2$, por tanto $n = (p-1)^2 / 4$ y $m = n + p = (p+1)^2 / 4$. Usando que $1000 \leq m < 2005$ obtenemos las soluciones m = 1764, 1600, 1369, 1296, 1156 (los correspondientes valores de p son p = 83, 79, 73, 71 y 67)
Cuando k = 2 obtenemos (r, s) = (4, 0) y (r, s) = (3, 1). En el primer caso $m = n + p^2 = (p^2 + 1)^2 / 4$, que no tiene solución para p primo y $1000 \leq m < 2005$. En el segundo caso $m = p(p + 1)^2 / 4$, el cual da m = 1900 y 1377 (que se obtienen para p = 19 y 17).

4. La sustitución x = u – 1, y = v + 1 dan $z^2 + 1 = (u^2 - 1)(v^2 - 1)$. Una verificación directa demuestra que u, v, z son pares. Por otro lado si $|u| > 1$, entonces $u^2 - 1$ tiene divisores p de la forma 4k + 3.
Por tanto $z^2 + 1 \equiv 0 \pmod p$, una contradicción. Por analogía la desigualdad $|v| > 1$, nos da también una contradicción. Obviamente si $|u| = 1$ ó si $|v| = 1$ son imposibles.
Por tanto la única solución es u = v = z = 0, y por tanto x = - 1, y = 1, z = 0.

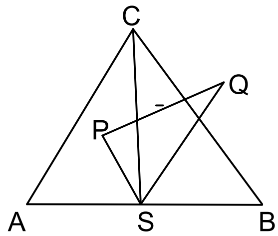
5. a). Tenemos $\angle QCA = \angle QMA = \angle CNA$, $\angle PCN = \angle PMN = \angle NAC$.
Por tanto $\angle QCP = \angle QCA + \angle ACN + \angle NCP = \angle CNA + \angle ACN + \angle NAC = 180$, por tanto los puntos P, C y Q son colineales.
b). Sea $\angle ACM = \varphi$ y $\angle NCM = \psi$, y sean R_1 y R_2 los circunradios de ΔAMC y ΔMNC, respectivamente. Por la ley de los senos obtenemos QC = $2R_1$ sen $\angle QMC$ = $2R_1$ sen ψ, CP = $2R_2$ sen $\angle PMC$ = $2R_2$ sen φ, AM = $2R_1$ senφ y BM = $2R_2$ sen ψ, por tanto PC. CQ = AM . BM.
Como en a) vimos que L, C, K son colineales y KC. CL = AN. BN como arriba. Como el circuncírculo de ΔMNC pasa por K, C y P, PQ y KL no pueden coincidir. Por tanto P, Q, K, L son concíclicos si y sólo si CP. CQ = CL. CK $\Leftrightarrow$ AM. MN = BN. MN $\Leftrightarrow$ AM = BN.

6. Sea M el punto medio de BC, I el excentro del triángulo ABC tangente a AB y T es su punto de tangencia con la recta BC. Usando la notación estándar para los elementos del ΔABC, tenemos $IM = \frac{a}{2} + r_c$, IT = r_c , $MT = s - \frac{a}{2}$ (s es el semiperímetro del ΔABC) como BT = s – a. Por el teorema de Pitágoras para el ΔMIT, da $\left(\frac{a}{2} + r_c\right)^2 = r_c^2 + \left(s - \frac{a}{2}\right)^2$. Por tanto a$r_c$ = s(s – a). En otra parte tenemos, r_c = $\frac{F}{s-c}$, (F es el área de ΔABC), y la fórmula de Herón da:

a F = ar_c (s – c) = s(s – a)(s – c) = $\frac{F^2}{s-b}$, por tanto a(s – b) = F (1)

Como a, b, c están en progresión aritmética , existe un x tal que a = b – x y c = b + x. Por tanto $s = \frac{3b}{2},\ s-a = \frac{b}{2} + x,\ s-b = \frac{b}{2},\ s-c = \frac{b}{2} - x$, ahora usando (1) y la fórmula de Herón tenemos la ecuación $(b – x)^2 = 3\left(\frac{b^2}{4} - x^2\right)$, la cual tiene como única solución $x = \frac{b}{4}$. Por tanto a = $\frac{3b}{4}$, c = $\frac{5b}{4}$ y por tanto $a^2 + b^2 = c^2$, y por tanto $\angle$ACB = 90.

7. Sea ϖ = $\angle$ASC como se muestra en la figura.
Como SP y SQ son los radios de las circunferencias circunscritas de los triángulos SAC y SBC, utilizando la ley de los senos tenemos SP = $\frac{AC}{2sen\varpi}$ y SQ = $\frac{BC}{2sen\varpi}$.



Por el teorema del ángulo central y el inscrito, obtenemos
$\angle$PSQ = $\angle$PSC + $\angle$QSC
= (90º - ½ $\angle$SPC) + (90º - ½ $\angle$SQC)
= (90º - α) + (90º - β) = 180º - α - β - γ.
Entonces el área del ΔSPQ es

A_{SPQ} = ½ SP·SQ·sen $\angle$PSQ = $\frac{AC \cdot BC \cdot sen\gamma}{8sen^2\varpi}$ = $\frac{A_{ABC}}{4sen^2\varpi}$. El mínimo se obtiene para $sen^2\varpi = 1$, es decir ϖ = 90º. Luego el punto S es el pie de la altura trazada desde el vértice C.

8. Primero mostremos que cada estudiante es enseñado por la misma cantidad $\frac{h(c-1)}{k-1}$ de profesores.
Fijemos un estudiante A, y suponemos que a él lo enseñan r profesores. Contamos el número de pares (x;y) de estudiantes y profesores tales que profesores enseñan a ambos estudiantes A y x (donde x es diferente de A). Por primera tomando x y entonces y, hay (c – 1)h pares. Por primera mostramos que y entonces x, hay r(k – 1) pares. Como (c – 1)h = r(k – 1) se tiene que r = $\frac{h(c-1)}{k-1}$.
Ahora, si consideramos el número total de estudiantes enseñados por los profesores, tenemos bk = c·$\frac{h(c-1)}{k-1}$. De esta forma $\frac{b}{h} = \frac{c(c-1)}{k(k-1)}$.

9.

10.