PRUEBA DE ENTRENAMIENTO 3

Los estudiantes de OCM deben resolver los problemas 1, 3, 5 y 7.
Los estudiantes de IMO y OIM deben resolver los problemas 2, 4, 6 y 8.
El resto deben resolver los problemas 5, 6, 7 y 8.

1. Determina el menor valor posible del mayor término en una progresión aritmética de siete números primos diferentes.

2. Los enteros positivos **a** y **b** son primos relativos y se tiene que $\frac{a+b}{a-b}$ es también un entero positivo. Probar que al menos uno de los números ab + 1 ó 4ab + 1 es un cuadrado perfecto.

3. Hallar el primer dígito a la izquierda y el primer dígito a la derecha del punto decimal en $\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)^{2000}$.

4. Sean a, b y c números reales, se define $s_n = a^n + b^n + c^n$ para n entero no negativo. Si $s_1 = 2$, $s_2 = 6$ y $s_3 = 14$. Probar que $|s_n^2 - s_{n-1} \cdot s_{n+1}| = 8$.

5. Los puntos M y N están en el lado AB del triángulo ABC y M está entre A y N. La recta que pasa por M y es paralela a AC intercepta al circuncírculo de MNC en P y la recta trazada por M paralela a NC intercepta al circuncírculo de AMC en Q. Análogamente, la recta trazada por N paralela a BC intercepta al circuncírculo de MNC en K y la recta trazada por N paralela a MC intercepta al circuncírculo de BNC en L.
a). Prueba que P, Q, C son colineales
b). Prueba que P, Q, K, L son concíclicos si y sólo si AM = BN.

6. Sea P un punto interior del triángulo ABC. Sean D, E y F los pies de las perpendiculares trazadas desde P hasta BC, CA y AB respectivamente. Sea Q un punto interior del triángulo ABC tal que $\angle ACP = \angle BCQ$ y BAQ = CAP. Probar que $\angle DEF = 90^\circ$ si y solo si Q es el ortocentro del triángulo BDF.

7. Dos personas A y B tienen 100 fichas que se reparten de la siguiente manera:
- A toma un grupo de fichas y B decide para quien es el grupo.
- Esta operación se repite varias veces hasta que una de las dos personas recibe un total de 9 grupos.
- A continuación, la otra persona se queda con todas las fichas que aún no se han repartido, además de los grupos que ya tiene (puede ocurrir que el reparto se haya terminado antes de que alguien reciba su noveno grupo).
- En cada oportunidad A puede formar el grupo con tantas fichas como desee.

¿Cuál es el número máximo de fichas que A puede asegurarse de obtener en este reparto, independientemente de lo que haga B?
Dar el número, explicar cómo debe hacer A para asegurarse del mismo y demostrar que no puede estar seguro de obtener más que esa cantidad de fichas.

8. Se embaldosa un pasillo de 2x7 utilizando 7 baldosas grises de 2x1 cada una. Determinar de cuántas maneras puede quedar embaldosado el pasillo.

SOLUCIONES

1. Consideremos la progresión aritmética p, p + d, p + 2d, p + 3d, p + 4d, p + 5d, p + 6d.
Ahora p > 2 ya que si p = 2 entonces p + 2d es par, entonces no es primo. Entonces p es impar y d par, de esta forma p + d es impar y mayor que 2 y no primo. Tampoco d puede ser un múltiplo de 3, ni de 5, entonces $p \geq 7$ y d/30. Si p > 7, entonces habrá un múltiplo de 7 en alguno de los términos de la progresión por lo que el menor valor posible de los términos de la progresión es $11 + 6\cdot 210 = 1271$.
Si p = 7 y como d/30, entonces $d \geq 120$. Si d = 120 los términos de la sucesión son:

7, 127, 247, 367, 487, 607, 727,

pero $247 = 13\cdot 19$ por lo que esta sucesión no contiene solamente números primos.
Por otro lado si d = 150 los términos de la sucesión son:

7, 157, 307, 457, 607, 757, 907.

Y todos los números son primos. Como 907 < 1271, este tiene el menor valor posible.

2. Sea $\frac{a+b}{a-b}$ = m, entonces a + b = ma – mb implicando que $\frac{a}{b} = \frac{m+1}{m-1}$. Como a y b son primos relativos, existe un entero k tal que m + 1 = ka y m – 1 = kb, multiplicando estas ecuaciones se tiene que $m^2 - 1 = k^2ab$ y $m^2 = k^2ab + 1$ por lo que el número k es un divisor común de los números m – 1 y m + 1 por lo que debe ser un divisor de su diferencia 2. Entonces k puede ser solamente 1 ó 2 y queda resuelto el problema.

3. Sea $x = \left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)^{2000} = (7 + 2\sqrt{10})^{1000}$. Sea $y = (7 - 2\sqrt{10})^{1000}$, entonces
$x + y = m + n\sqrt{10} + m - n\sqrt{10} = 2m$ para algunos enteros m y n. Por el teorema del binomio se tiene que $2m = 2(7^{1000} + \binom{1000}{2}7^{998}\cdot 2^2\cdot 10 + \binom{1000}{4}7^{996}\cdot 2^4\cdot 10^2 + \ldots + 2^{1000}\cdot 10^{500}) \equiv 2\cdot 7^{1000} \pmod{10}$.

Como

$$7^k \equiv \begin{cases} 1 \pmod{10} & \text{si} \quad k \equiv 0 \pmod 4 \\ 7 \pmod{10} & \text{si} \quad k \equiv 1 \pmod 4 \\ 9 \pmod{10} & \text{si} \quad k \equiv 2 \pmod 4 \\ 3 \pmod{10} & \text{si} \quad k \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

y $1000 \equiv 0 \pmod 4$, $2m \equiv 2 \pmod{10}$. Como el menor dígito de los enteros x + y es 2, ahora $7 - 2\sqrt{10}$ es aproximadamente 0,7 con y < 0,01: Seguimos que x = (x + y) – y = (…2) – y = 1,9… El primer dígito ala izquierda del punto decimal es 1 y el primer dígito a la derecha del punto decimal es 9.

4. Consideremos que los valores de a, b y c son simétricos, entonces
$a + b + c = 2$; $ab + bc + ca = ½ (s_1^2 - s_2) = -1$; $abc = -\frac{1}{3}(s_1^3 - s_3 - 3s_1(ab + bc + ca)) = 0$,

por lo que a, b y c son las raíces de la ecuación cúbica $x^3 - 2x^2 - x = 0$ que son 0, $1 + \sqrt{2}$ y $1 - \sqrt{2}$.
Sin pérdida de generalidades consideremos que $a = 1 + \sqrt{2}$, $b = 1 - \sqrt{2}$ y c = 0, teniendo que $a^2 + b^2 = 6$ y ab = -1 de esta forma

$$s_{n-1}\cdot s_{n+1} = (a^{n-1} + b^{n-1})(a^{n+1} + b^{n+1}) = a^{2n} + b^{2n} + a^{n-1}b^{n-1}(a^2 + b^2)$$
$$= s_n^2 - 2a^nb^n + (ab)^{n-1}\cdot s_2 = s_n^2 - 2(ab)^n = s_n^2 - 8(-1)^n,$$

de donde resulta que $|s_n^2 - s_{n-1}\cdot s_{n+1}| = |s_n^2 - s_n^2 + 8(-1)^n| = 8$.

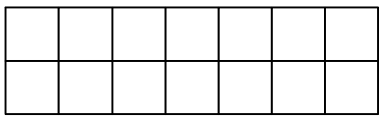
5. a). Tenemos $\angle QCA = \angle QMA = \angle CNA$, $\angle PCN = \angle PMN = \angle NAC$.
Por tanto $\angle QCP = \angle QCA + \angle ACN + \angle NCP = \angle CNA + \angle ACN + \angle NAC = 180$, por tanto los puntos P, C y Q son colineales.
Sea $\angle ACM = \varphi$ y $\angle NCM = \psi$, y sean R_1 y R_2 los circunradios de ΔAMC y ΔMNC, respectivamente. Por la ley de los senos obtenemos
$QC = 2R_1$ sen $\angle QMC = 2R_1$ sen ψ, $CP = 2R_2$ sen $\angle PMC = 2R_2$ sen φ, $AM = 2R_1$ senφ y $BM = 2R_2$ sen ψ, por tanto $PC\cdot CQ = AM\cdot BM$.

b). Como en a) vimos que L, C, K son colineales y $KC\cdot CL = AN\cdot BN$ como arriba. Como el circuncírculo de ΔMNC pasa por K, C y P, PQ y KL no pueden coincidir. Por tanto P, Q, K, L son concíclicos si y sólo si $CP\cdot CQ = CL\cdot CK \Leftrightarrow AM\cdot MN = BN\cdot MN \Leftrightarrow AM = BN$.

6. Consideremos que $\angle DEF = 90^\circ$. Las rectas FQ y DQ intersecan a BC y AC en los puntos X, Y respectivamente. Como los cuadriláteros AEPF y PDCE son cíclicos, tenemos:
$\angle QAC + \angle QCA = \angle FAP + \angle PCD = \angle FEP + \angle PED = \angle FED = 90^\circ$, de esta forma $\angle AQC = 90^\circ$. Observemos que los triángulos AFP y AQC son semejantes como también lo son los triángulos PDC y AQC con lo que $\dfrac{AF}{AQ} = \dfrac{AP}{AC}$ y $\dfrac{CD}{CQ} = \dfrac{CP}{CA}$. De esta forma $\angle FAQ = \angle PAC$ y $\angle ACP = \angle QCD$ teniendo que los triángulos AFQ y APC son semejantes al igual que los triángulos QDC y APC, por lo que
$\angle DYB = \angle YQF + \angle YFQ = \angle YQF + \angle FAQ + \angle FQA = \angle YQF + \angle DQC + \angle FQA = 180^\circ - \angle AQC = 90^\circ$,
$\angle FXB = \angle XQD + \angle QDX = \angle XQD + \angle DCQ + \angle DQC = \angle XQD + \angle FQA + \angle DQC = 180^\circ - \angle AQC = 90^\circ$.
De esta forma Q es el ortocentro del triángulo BDF.
Consideremos ahora que Q es el ortocentro del triángulo BDF. Las rectas FQ y DQ intersecan a BC y AB en los puntos X, Y respectivamente. Observemos que PFQD es un paralelogramo.
Sea $\angle BAQ = \alpha$ y $\angle EDP = \angle ACP = \angle QCD = \beta$. Aplicando la ley de los senos en el triángulo AFQ, tenemos $\dfrac{AF}{\operatorname{sen}(90^\circ - B - \alpha)} = \dfrac{FQ}{\operatorname{sen}\alpha}$, como $AF = AP\cdot\cos(A - \alpha)$ y la ley de los senos en el triángulo APC, tenemos $\dfrac{AP\cos(A-\alpha)}{\cos(B+\alpha)} = \dfrac{FQ}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{PD}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{PC\operatorname{sen}(C-\beta)}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{AP\operatorname{sen}(C-\beta)}{\operatorname{sen}\beta}$. De esta forma
$\operatorname{sen}\beta\cos(A - \alpha) = \operatorname{sen}(C - \beta)\cos(B + \alpha)$ usando identidades trigonométricas conocidas se llega a que
$\beta + A - \alpha = 180^\circ - (C - \beta + B + \alpha)$, por lo que $\operatorname{sen}(\beta - A + \alpha) = \operatorname{sen}(C - \beta - B - \alpha)$, como $A + B + C = 180^\circ$, tenemos que $(\beta - A + \alpha) = (C - \beta - B - \alpha)$ de donde $\alpha + \beta = 90^\circ - B$.
Ahora tenemos $\angle AQC = (\alpha + \angle ABQ) + (\beta + \angle CBQ) = \alpha + \beta + \angle B = 90^\circ$, dado que
$\angle DEF = \angle DEP + \angle PEF = \angle DCP + \angle FAP = \angle QCA + \angle QAC = 180^\circ - \angle AQC = 90^\circ$.

7. Supongamos que B ha decidido quedarse con todos los grupos de 6 o más fichas y darle a A todos los grupos de 5 o menos fichas. Entonces, si durante el reparto A formó 9 grupos de 5 o menos fichas, esos grupos le tocan a él, y todas las demás fichas le tocan a B (los grupos de 6 o más fichas más las fichas que aún no se hayan repartido). De este modo A recibe a lo sumo $9\cdot 5 = 45$ fichas.
Si durante el reparto A formó 9 grupos de 6 o más fichas, estas le tocan a B y todas las demás son para A (los grupos de 5 o menos, más las fichas que aún no se han repartido). De este modo, B recibe por lo menos $9\cdot 6 = 54$ fichas y a tiene 46.
Por lo tanto A no puede asegurar lograr más de 46 fichas, pero puede asegurarse de por lo menos 46. Para ello hace, mientras sea posible, todos los grupos de 6 fichas. Si B toma 9 de los grupos, finaliza B con 54 fichas y A con 46. Si B le da a A 9 grupos, finalizan B con 46 y A con 54. Si B le dio 8 grupos a A y se quedó con 8 grupos hasta ese momento, cada uno tiene 48 fichas y el reparto no ha terminado pues quedan 4 fichas, pero, sin importar como termine, A ya tiene 48 fichas y se ha asegurado más de 46.

8. Consideremos que el pasillo es un tablero de 2 filas y 7 columnas como se muestra en la figura.



Cada baldosa cubre dos casillas adyacentes de una misma fila o columna. Observemos que si se coloca una baldosa que cubra dos casillas de una misma fila, entonces se debe colocar otra baldosa que cubra dos casillas de la otra fila de modo que con esas dos baldosas se cubran exactamente dos columnas del tablero. Por lo que podemos suponer que estas dos baldosas son un bloque de 2x2. Un cubrimiento del tablero puede contener 0, 1, 2 ó 3 de tales bloques.
Así, el problema se reduce a contar las maneras de cubrir el tablero con i bloques de 2x2, $0 \le i \le 3$ y $7 - 2i$ baldosas de 2x1 que cubran una columna cada una.
Denotemos por S a las baldosas y por D a los bloques de 2x2. Si $0 \le i \le 3$, cada palabra de i letras D y $7 - 2i$ letras S corresponde a un cubrimiento y recíprocamente, a cada cubrimiento le corresponde una palabra.
Si $i = 0$, tenemos $7 - 2\cdot 0 = 7$ letras S y solo una palabra.
Si $i = 1$, entonces $7 - 2\cdot 1 = 5$ y tenemos 1 letra D y 5 letras S. Se pueden formar 6 palabras distintas.

Si i = 2, entonces 7 - 2·2 = 3 y tenemos 2 letras D y 3 letras S. Debemos contar cuántas palabras de 5 letras se pueden formar. Hay $\binom{5}{2}$ = 10 maneras de elegir los dos lugares para la letra D y, por lo tanto, hay 10 palabras distintas.
Si i = 3, entonces 7 - 2·3 = 1 y tenemos 3 letras D y 1 letra S, con las que debemos formar palabras de 4 letras. Hay 4 ubicaciones posibles para la única letra S y, por lo tanto, hay 4 palabras distintas.
El número total es 1 + 6 + 10 + 4 = 21, y en consecuencia hay 21 maneras de embaldosar el pasillo.