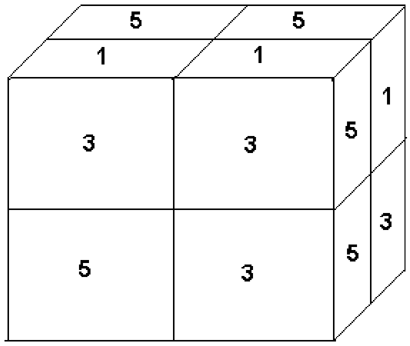
CONCURSO NACIONAL DE MATEMÁTICA
SECUNDARIA BÁSICA
CURSO 2005 - 2006
TEMARIO COMÚN

NOMBRE: ________________________________ GRADO: ______

ESCUELA: ______________________________ MUNICIPIO: ______

TIEMPO: 4 HORAS

1. Una panadería vende panecillos a \$0.30 cada uno, o 7 panecillos en \$1.00 o una docena de panecillos en \$1.80. Mi mamá me dio un billete de \$10 y me dijo que comprara 60 panecillos y que me quedara con el vuelto. Quiero comprar al menos 60 panecillos y quedarme con la mayor cantidad de dinero posible. ¿Cuál es la mayor cantidad de dinero con la cual me puedo quedar? Explica tu razonamiento.



2. El cubo que se muestra a continuación está compuesto de 8 cubitos iguales. En cada uno de ellos las caras que tienen los números 1, 3 y 5 concurren en un vértice. Alejandro, Beatriz y Cristina reflexionan sobre lo que se pudiera decir sobre un cubo semejante. Primero los tres dicen: Los números de cada una de las doce caras visibles son impares y su suma S es 40.

a) Alejandro dice: El cubo se puede componer de 8 cubitos de modo que los números de cada una de las doce caras visibles sigan siendo impares, pero que su suma sea solo 30.
Dibuja un cubo compuesto como el de la figura, en el que se cumpla lo que Alejandro afirma.
b) Beatriz dice: Manteniendo la condición de que los números de cada una de las doce caras visibles sean impares, se puede lograr que su suma sea la menor posible.
Averigua cuál es esa suma menor posible.
c) Cristina añade: Si se quiere obtener lo que dice Alejandro de que los números de cada una de las doce caras visibles sean impares, pero que su suma sea 30, entonces al menos cuatro de las caras visibles tienen que tener un número 1.
Argumenta lo que Cristina dice.

3. Se busca un número natural, que cumpla las siguientes dos condiciones:
i) En el número aparecen las cifras 3,5 y 9 al menos una vez.
ii) El número es divisible por 3, 5 y 8.
Halla los seis menores números naturales que cumplen las condiciones (i) y (ii).

SOLUCIONES
TEMARIO COMÚN

1. Los grupos de 7 panecillos dan el mejor precio, mirando las cosas desde la base del costo por panecillo, pero 60 no es divisible por 7. Las diferentes posibilidades de comprar exactamente 60 panecillos son:

docenas	grupos de 7	individuales	costo	
0	8	4	$9.20	*
1	6	6	$9.60	*
2	5	1	$8.90	
3	3	3	$9.30	
4	1	5	$9.50	*
5	0	0	$9.00	

Pero, un grupo de 7 panecillos es, en efecto más barato que 4 panecillos comprados individualmente, lo cual significa que podemos mejorar las tres filas marcadas con * si añadimos un grupo de 7 panecillos y economizamos en panecillos individuales. Teniendo entonces

docenas	grupos de 7	individuales	costo	
0	9	0	$9.00	
1	7	0	$8.80	
4	2	0	$9.20	*

La mejor estrategia es comprar una docena más 7 grupos de 7 panecillos, me dan $1.20 de vuelto y me puedo comer un panecillo.

2.
a) En total existen solo las siguientes posibilidades para que los números de las 12 caras visibles sean impares y sumen 30, atendiendo al hecho de que las caras que tienen los números 1, 3 y 5 concurren en un vértice:
7 veces 1, 1 vez 3, 4 veces 5
6 veces 1, 3 veces 3, 3 veces 5
5 veces 1, 5 veces 3, 2 veces 5
4 veces 1, 7 veces 3, 1 vez 5
b) En el cubo tienen que ser visibles los números 1, 3, y 5 del cubito situado en la parte delantera, a la derecha y arriba. En el cubo hay además tres cubitos que tienen dos números visibles. La menor suma posible de todos los números visibles se alcanza, cuando en esos tres cubitos son visibles los números 1 y 3. Si se elige en los restantes tres cubitos el número 1, la menor suma posible es:
$1+3+5+3\ (1+3)+3.1 = 24$.
c) De nuevo tienen que ser visibles los números 1, 3, y 5 del cubito situado en la parte delantera, a la derecha y arriba. Los restantes 9 números que son visibles son mayores o iguales a 1. Ahora bien, si de ellos a lo sumo 2 tienen el valor 1, entonces por lo menos siete tienen un valor mayor que 1. Para la suma S de todos los números visibles se cumple que:
$S \geq 1+3+5+9.1+7.2=32$.
Por tanto la suma 30 no se puede alcanzar; esto es solo posible cuando además del primer número 1, al menos tres de los restantes números visibles tienen el valor 1.

3. Si un número natural n es divisible por 5 y por 8, es divisible por 40. La cifra de las unidades es entonces 0, y la de las decenas, par. Como este número satisface además la condición i) de que entre sus cifras aparezcan 3,5 y 9, tiene que tener al menos 5 lugares.
Supongamos que el número n tiene 5 lugares, entonces la cifra de las centenas es impar. Según la regla de divisibilidad por 8 (o la regla de divisibilidad por 4 aplicada al número n/10) resulta: La cifra de las decenas de n tiene que ser 2 o 6. Entonces la suma de las cifras básicas de n no es divisible por 3. Luego el número tiene que tener por lo menos 6 lugares.
Supongamos ahora que el número tiene exactamente 6 lugares y que la primera cifra es 1.En este caso de nuevo la cifra de las centenas tiene que ser impar y la cifra de las decenas, 2 o 6. Cuando la cifra de las decenas es 2 n no es divisible por 3, pero con la cifra 6 sí es divisible por 3.
Luego existen exactamente seis números naturales de seis lugares y con un 1 como primera cifra que satisfacen las condiciones i) y ii):
135960, 139560, 153960, 159360, 193560, 195360.
Cualquier otro número natural que cumpla las condiciones dadas, o tiene más de seis cifras, o si tiene seis cifras, la primera es mayor que 1. Por eso los números naturales anteriores son los seis menores números naturales que cumplen las condiciones dadas.

CONCURSO NACIONAL DE MATEMÁTICA
SECUNDARIA BÁSICA
CURSO 2005 - 2006

7^{MO} GRADO

NOMBRE:______________________________PROVINCIA: _____________

ESCUELA:_______________________________MUNICIPIO: _____________

TIEMPO: 4 HORAS

1. ¿Cuántos números entre 1 y 2006 se pueden escribir utilizando exactamente dos dígitos diferentes?
Por ejemplo, 1919 cumple la condición y 1231 no la cumple.

2. En el año N, el día 300 del año cae martes. En el año N + 1, el día 200 del año también cae martes. ¿Qué día de la semana cae el día 100 del año N – 1?

3. ¿Es posible que para cuatro puntos no alineados, los cuatro triángulos que estos puntos determinan sean todos acutángulos? Argumenta tu respuesta.

SOLUCIONES
7mo. GRADO

1. Del 1 al 9 no hay ninguno, del 10 al 99 todos cumplen, excepto los múltiplos de 11 que sólo utilizan un dígito. Por lo tanto, hay 81 números de la forma $\overline{ab}$ con a>0 y a≠b. Del 100 al 999, para que se escriban usando dos dígitos, tienen que ser de la forma $\overline{aab}$, $\overline{abb}$ o $\overline{aba}$ con a>0 y a≠b. De cada forma hay 81 números, por lo que entre 100 y 999 hay 81x3=243 números. Entre 1000 y 1999 deben ser de la forma 1a11,11a1, 111a, 11aa, 1a1a, 1aa1, 1aaa para cierta a. En cada forma hay 9 valores posibles para a, luego hay 9x7= 63 números. Por último, entre 2000 y 2006, solo existen dos números. Por lo que entre 1 y 2006 hay 81 +243+63+2= 389. Solo utilizan dos dígitos diferentes al escribirlos 389 números.

2. Tengamos en cuenta que si un martes ocurre d días después de otro martes, entonces d es un múltiplo de 7. Ahora consideremos si alguno de los años N – 1, N o N + 1 es bisiesto. Si N no es bisiesto, entonces el día 200 del año N + 1 es 365 – 300 + 200 = 265 días después de un martes, y por lo tanto es un lunes ya que 265 = 37·7 + 6 por lo que N es bisiesto y el día 200 del año N + 1 es también martes, como el año N – 1no puede ser bisiesto por serlo N, entonces el día 100 del año N – 1 precede al martes dado en 365 – 100 + 300 = 565 = 80·7 + 5 y es viernes.

3. Si los cuatro puntos A, B, C, D forman un cuadrilátero convexo, tenemos que los ángulos interiores del cuadrilátero suman 360º, luego no es posible que los cuatro ángulos sean menores que 90º, digamos que $\angle A \geq 90^{o}$, entonces A junto con los dos vértices adyacentes forman un triángulo que no es acutángulo.
Si los cuatro puntos no forman un cuadrilátero convexo, hay tres que forman un triángulo, digamos A, By C, dejando el cuarto punto D dentro del triángulo ABC. Si nos fijamos en los ∠ADB, ∠BDC y ∠CDA, al menos uno de ellos es mayor que 90º. Si por ejemplo es el primero, tendremos que el triángulo ADB no es acutángulo.

CONCURSO NACIONAL DE MATEMÁTICA
SECUNDARIA BÁSICA
CURSO 2005 - 2006
8^{VO} GRADO

NOMBRE:_________________________________ PROVINCIA: __________

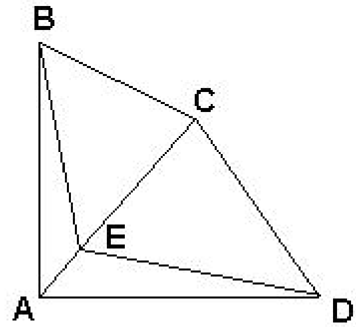
ESCUELA:_______________________________ MUNICIPIO: _________

TIEMPO: 4 HORAS

1. Mi calculadora está dañada. Sólo muestra la cifra de las unidades de la suma cuando se efectúa una adición. Por ejemplo 6 + 7 produce un 3 en la pantalla de mi calculadora.
Conseguí que apareciera la sucesión de dígitos 8, 6, 4, 0, 4, 4, 8, … de la siguiente manera:
Cada término después del segundo es la suma en mi calculadora de los dos dígitos inmediatamente anteriores.
¿Cuál es el dígito que ocupa la posición 2006 en la sucesión?

2. Los enteros positivos a, b y c satisfacen $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}+\frac{1}{2}$, donde $a \geq 3$ y $b \geq 3$. Determinar todos los valores diferentes que puede tomar c.

3. En la figura A, E y C están alineados
$\angle BAD = 90°$,
$\angle BCA = 80°$,
$\angle CDE = \angle BAC = 40°$,
$\angle EDA = 10°$.
Calcula la amplitud del ángulo ABE.



SOLUCIONES
8vo. GRADO

1. La sucesión de dígitos que se genera es 8, 6, 4, 0, 4, 4, 8, 2, 0, 2, 2, 4, 6, 0, 6, 6, 2, 8, 0, 8, 8, 6,…, es decir, la sucesión se repite después de 20 dígitos. El dígito que ocupa la posición 2006 en la sucesión se obtiene viendo el resto de 2006 en la división por 20 y 2006 = 100·20 + 6 y como el término que ocupa el lugar 6 en la sucesión es 4 ese será el número que ocupa la posición 2006.

2. No se puede tener ni a > 3 ni b > 3, porque esto significaría que a ≥ 4 y b ≥ 4 que daría como resultado $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\le\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\le\frac{1}{2}$, y c no puede tomar ningún valor entero positivo.

Si a = 3, entonces $\frac{1}{c}=\frac{1}{b}-\frac{1}{6}=\frac{6-b}{6b}$, entonces b sólo puede tomar los valores 3, 4 y 5, ya que un valor de 6 o más haría que c no fuera un entero positivo.

Cuando b = 3, 4, 5, los valores correspondientes de c son 6, 12, 30 y cuando b = 3, por simetría a = 3, 4, 5 y c toma los mismos valores anteriores.

$\therefore$ Hay solamente tres valores posibles para c.

3. Ver la igualdad de los triángulos ABC y DEC y como consecuencia demostrar que $\angle$EBC es 50^0, luego el $\angle ABE = 10^0$

CONCURSO NACIONAL DE MATEMÁTICA

SECUNDARIA BÁSICA

CURSO 2005 - 2006

9NO GRADO

NOMBRE:_________________________________ PROVINCIA: _______________

ESCUELA:_________________________________ MUNICIPIO: ______________

TIEMPO: 4 HORAS

1. Sean a, b, c enteros positivos con $\frac{13}{9} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c+1}}$.

Halla el valor de a + b + c.

2. La sucesión infinita de números naturales 1, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 16, ... se ha formado de la manera siguiente: se coloca el primer impar (1), luego se colocan los siguientes dos pares (2, 4), después los tres impares siguientes al último par colocado (5, 7, 9), luego los cuatro pares siguientes al último impar que se colocó y así sucesivamente. ¿Cuál es el número par más cercano a 2006?

3. Sea ABCD un paralelogramo. Se construyen triángulos equiláteros ABF y ADE, donde F y D son puntos exteriores al paralelogramo ABCD. Prueba que el triángulo FCE es equilátero.

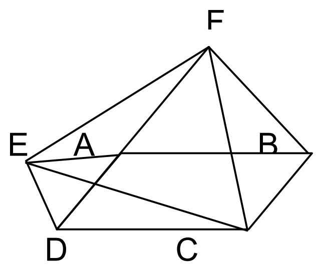
SOLUCIONES
9no. GRADO

1. Como b y c son enteros positivos $b+\frac{1}{c+1}>1$, luego $\frac{1}{b+\frac{1}{c+1}}<1$, entonces a es la parte entera de $\frac{13}{9}$, por tanto a = 1 y $\frac{4}{9}=b+\frac{1}{c+1}$ de donde b = 2 y c = 3.
Por lo tanto a + b + c = 6.

2. Si arreglamos los números en forma triangular tenemos

1								
2	4							
5	7	9						
10	12	14	16					
17	19	21	23	25				
......								
.....								
.....								
1850	.	.	.	.	.	$1936 = 44^2$		
1937	.	.	.	.	.	2023		$2025 = 45^2$
2026								

Por lo que el par más cercano a 2006 es el 2026.



3. Consideremos los triángulos CDE y FBC.
Es fácil observar que FB = CD y BC = DE.
Además ∠FBC = 60º + ∠ABC = 60º + ∠ ADC = ∠CDE.
Por lo tanto los triángulos CDE y FBC son iguales,
Entonces FC = EC y ∠FCE = ∠BCD – (∠FCB + ∠DCB) =
= ∠BCD – (∠FCB + ∠CFB) = ∠BCD – (180º - ∠FBC) =
= ∠BCD + ∠FBC – 180º = 60º.
Por lo tanto el triángulo FCE es equilátero.