Concurso Provincial de Matemática
Ciudad de La Habana
Secundaria Básica
2005-2006

Nombre: ___________________________________ Grado:_____
Escuela:____________________________________ Mupio:___________

Tiempo: 4 horas

Séptimo Grado: Responderán las preguntas 1, 2 y 3
Octavo Grado: Responderán las preguntas 2, 4 y 5
Noveno Grado: Responderán las preguntas 2, 6 y 7

1- Halla cuántos enteros n tienen la siguiente propiedad:
"entre los divisores positivos de n, distintos de 1 y n, el mayor es 15 veces el más pequeño"

2--Los doce números de un reloj se desprendieron, y al colocarlos de nuevo, se cometieron algunos errores. ¿Es posible que en la nueva colocación no halla un número que al sumarle los dos números que quedaron a sus lados , se obtenga un resultado mayor o igual a 20?. Justifique su respuesta.

3- Se tiene una estrella de 5 puntas. Sean a, b , c, d y e las amplitudes de los ángulos de cada punta. Calcula S= a+b+c+d+e

4- En una Secundaria Básica hay tres grupos de Octavo Grado. El promedio de las calificaciones en el grupo A es de 87 puntos, en el grupo B es de 73 puntos, en el grupo C es de 91. Se sabe que el promedio de los grupos A y B juntos es de 79, el de los grupos B y C es de 83. Encuentra el promedio de calificaciones de todo el grado.

5--Se tiene un triángulo cualquiera ABC, sobre los lados AB y AC se construyen exteriormente triángulos equiláteros (cuyas longitudes de sus lados coinciden con las longitudes de AB y AC respectivamente). Si F y G son los puntos medios de EA y AC , respectivamente. Calcula la razón $\frac{BD}{FG}$.

6-Un **punto retícula** en el plano es un punto con coordenadas enteras.
Halla todos los **puntos retícula** que hay en el segmento cuyos extremos son (3;17) y (48;281).

7-Se tiene un trapecio ABCD en ese orden, de bases AB y CD (AB >CD). Se prolongan para ambos lados cada una de las bases. Se trazan las bisectrices de los ángulos exteriores A y D y el punto donde se intersecan le llamaremos E. Análogamente se trazan las bisectrices exteriores de los ángulos B y C y se denota al punto de corte F. Si el perímetro del trapecio es P cm , calcula la longitud del segmento EF.

SOLUCIONES CPMSB 05-06

1- Cuando quitamos a 1 y a n de los divisores positivos de n , tenemos que el mayor y el menor , multiplicados ,deben dar n. Sea p el primer divisor positivo de n (distinto de 1). La condición del problema establece que $n=15p^2$, pero entonces 3 divide a n, así que $p \leq 3$. Solo tenemos dos soluciones, cuando p=2 ó p=3.

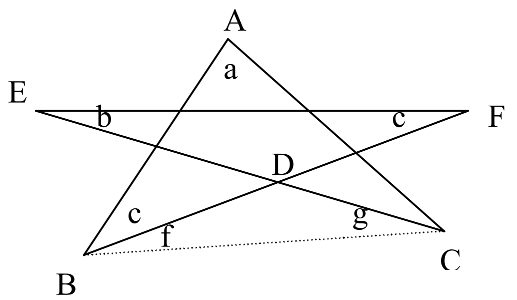
2- denotemos por a_i al número que quedó en nla posición i con $1 \leq i \leq 12$. Consideremos las doce sumas S_i de ternas de números ocupando posiciones consecutivas, esto es:
$S_1= a_1 +a_2+a_3$, $S_2=a_2+a_3+a_4$,……, $S_{12}=a_{12}+a_1+a_2$

Es claro que cada número entre 1 y 12 aparece como sumando en exactamente tres de estas sumas. Por lo que si sumamos todos los S_i obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{12} S_i =3(1+2+3+....+12)=234$$

Dividiendo 234 por 12 , vemos que el cociente es 19 y el resto es 6. Luego , por el principio de las casillas , algún sumando S_k debe valer por lo menos 20, como queríamos probar.

3-



-
Considerando el ΔABC obtenemos que $a+c+f+g+d=180^0$, pero de los triángulos BCD y FED obtenemos que f+g = b+e. Por lo tanto, $a + b+c+d+e=180^0$.

4-Sean a, b y c el número de elementos de A, B y C respectivamente. De la información dada obtenemos:

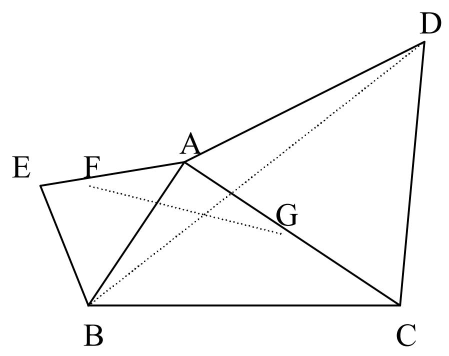
$$\frac{87a+73b}{a+b}=79 \qquad \frac{73b+91c}{b+c}=83$$

Simplificando obtenemos 4ª=3b y 5b=4c.

Pero N= $\dfrac{87a+73b+91c}{a+b+c}$ y sustituyendo a=$\dfrac{3}{4}$ y c=$\dfrac{5}{4}b$ obtenemos N=34.

5- Sea $\angle BAC = \alpha$ Como ACD y AEB son triángulos equiláteros , tenemos que AD=AC y AB = AE , además, $\angle EAC= \alpha+60^0$. Se sigue que los triángulos BAD y EAC son iguales por L.A.L . De aquí tenemos que BD=EC, además, como F y G son los puntos medios de EA y AC , tenemos que FG=$\dfrac{1}{2}$EC. Por lo tanto:

$$\frac{BD}{FG}=\frac{EC}{FG}=2$$



6- La pendiente del segmento es $\frac{88}{15}$ entonces la ecuación de la recta que contiene al segmento es y= 17 + $\frac{88}{15}(x-3)$

Tenemos que un punto retícula estará en el segmento si y solo sí

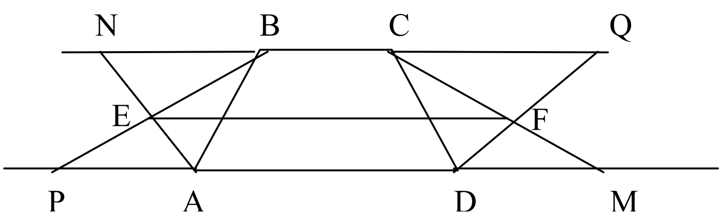
- x e y son enteros
- $3 \leq x \leq 48$
- y = 17+$\frac{88}{15}(x-3)$

Como 88 y 15 son primos relativos, tenemos que x-3 debe ser un múltiplo de 15 , esto es , x=3,18,33, …..Los cuatro puntos retículas son

(3;17), (18;105), (33;193), (48,281).

7- En el trapecio ABCD cada una de las base AB y CD se prolongan . Las bisectrices de los ángulos exteriores A y D se cortan en E y las de los ángulos exteriores B y C se cortan en F Si el perímetro del trapecio es p cm Calcule la longitud de EF,

Solución.



$$\angle BAD = \alpha \quad \angle ABC = 180 - \alpha$$

Sea el $\angle NAB = 90 - \frac{\alpha}{2} \quad \angle EBA = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \angle BEA = 90$

$$\Delta PEA = \Delta NEB \text{ por tanto E punto medio de PB}$$

Análogamente se demuestra que F es punto medio de CM por lo que EF es la paralela media del trapecio PMCD y como PA = AB y DM = CD resulta que

$$EF = \frac{PM + BC}{2} = \frac{PA + AD + DM + BC}{2} = \frac{AB + AD + CD + BC}{2} = \frac{p}{2}$$