# MINISTERIO DE EDUCACIÓN
# Concurso Nacional de Matemática
# Educación Preuniversitaria
# Curso 2009 - 2010
# Temario por Grados

**Nombre:** ______________________________________ **Grado:** _________
**Escuela:** __________________________________ **Provincia:** ____________
**Municipio:**_______________________________**Número C.I.:** _____________
**Calif:** __________

La distribución de las preguntas a resolver por grado es la siguiente:

Alumnos de 10mo. Grado: Responden las preguntas 1, 2 y 3.
Alumnos de 11no. Grado: Responden las preguntas 4, 5 y 6.
Alumnos de 12mo. Grado: Responden las preguntas 7, 8 y 9.

1. Determina todos los enteros a y b, tal que $\sqrt{2010+2\sqrt{2009}}$ sea una solución de la ecuación $x^2 + ax + b = 0$. Prueba que para tales a y b el número $\sqrt{2010-2\sqrt{2009}}$ no es solución de la ecuación dada.

2. Sea $n = (p^2 + 2) - 9(p^2 - 7)$ donde p es un número primo. Determina el menor valor de la suma de los dígitos de n y para qué número primo p se obtiene.

3. Sea ABC un triángulo rectángulo en B. Sea D un punto tal que BD es perpendicular a AC y DC = AC. Encuentra la razón $\frac{AD}{AB}$.

4. Prueba que para todos los números reales positivos x, y se verifica la desigualdad $x^4 + y^3 + x^2 + y + 1 > \frac{9}{2}xy$.

5. Sean $p \geq 2$ un número primo y $a \geq 1$ un entero distinto de p. Encuentra todas los pares ordenados de la forma (a;p) tales que $\frac{a+p}{a^2+p^2}$ se puede reducir hasta ser de la forma $\frac{1}{r}$ con r entero.

6. Sea ABC un triángulo acutángulo (con $AB \neq AC$) y M el punto medio de BC. La circunferencia de diámetro AM corta a AC en N y a BC otra vez en H. Se toma un punto K sobre AC (entre A y N) tal que CN = NK. Los segmentos AH y BK se intersectan en L. La circunferencia que pasa por A,K y L corta a AB en P. Demuestra que C, L y P son colineales.

7. Sean x, y, z números reales positivos tal que xyz = 1. Prueba que:

$$\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2}+\frac{y^3+z^3}{y^2+yz+z^2}+\frac{z^3+x^3}{z^2+zx+x^2}\geq 2$$

8. Sea ABCDE un pentágono convexo que cumple

AB < BC, AE < ED y AB + CD + EA = BC + DE.

Se toman puntos variables F, G y H que se mueven respectivamente sobre los segmentos BC, CD y DE. Se definen B´ como la proyección de B sobre AF, C´ como la proyección de C sobre FG, D´ como la proyección de D sobre GH y E´ como la proyección de E sobre HA. Demostrar que existe al menos un cuadrilátero B´C´D´E´, cuando F, G y H se mueven sobre sus lados, que es un paralelogramo.

9. Sea A el subconjunto de los números naturales tales que la suma de sus dígitos es múltiplo de 2009. Sean x < y elementos de A. Encuentra x < y tales que y – x es mínimo y x también es mínimo.

## SOLUCIONES

1. Note que: $\sqrt{2010+2\sqrt{2009}} = \sqrt{1+2\sqrt{2009}+2009} = \sqrt{\left(1+\sqrt{2009}\right)^2} = 1+\sqrt{2009}$.

De manera similar $\sqrt{2010-2\sqrt{2009}} = \sqrt{2009}-1$. Como $1+\sqrt{2009}$ es la solución de la ecuación cuadrática $x^2 + ax + b = 0$, tenemos
$2010 + 2\sqrt{2009} + a(1 + \sqrt{2009}) + b = 0$ ó $\sqrt{2009}(2 + a) = -b - 2010 - a$, el miembro derecho es un entero, luego el izquierdo también tiene que serlo. Esto implica que $2 + a = 0$, entonces $a = -2$, desde $-b-2010-a = 0$, tenemos $b = -2008$. Las dos soluciones de la ecuación cuadrática $x^2 - 2x - 2008 = 0$ son $1+\sqrt{2009}$ y $1-\sqrt{2009}$, luego $\sqrt{2009}-1$ no puede ser solución.

2. Se tiene que $n = (p^2 + 2) - 9(p^2 - 7) = -8p^2 + 65 = -8(p^2 - 8) + 1$
Para $p = 2$, $n = 33$; para $p = 3$, $n = -7$ y para $p = 5$, $n = -135$.
Cuando $p \neq 3$ se tiene que n es divisible por 3 y además como p es primo, entonces para $p > 5$, $p^2$ termina en 1 o en 9 por lo que $p^2 - 8$ termina en 3 o en 1 de aquí tenemos que $-8(p^2 - 8) + 1$ termina en 3 o en 7.
Si termina en 3, entonces el menor valor que puede tomar la suma de sus dígitos es 6 por ser un múltiplo de 3 y si termina en 7 el menor valor que puede tomar la suma de sus dígitos es 9.
Veamos ahora si hay otros valores de p donde n termine en 3 y la suma de sus dígitos sea 6, ya vimos que n no puede ser $-123$, tampoco puede ser un número negativo que tenga 1, 2 y algunos ceros porque no es un número de la forma $8k + 1$, lo mismo sucede si tiene otro 3 y algunos ceros.
$\therefore$ El menor valor de la suma de los dígitos de n es 6 y lo obtiene para $p = 2$.

3. Sean $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ y $d = AD$.
Por hipótesis $CD = CA = b$.
Sea E la intersección de AC con BD.
Como BD es perpendicular a AC, se tiene por el teorema de Pitágoras que : $d^2 - b^2 = AE^2 - EC^2 = c^2 - a^2$,
luego $d^2 = c^2 + b^2 - a^2$.
De nuevo por Pitágoras $b^2 - a^2 = c^2$.
Luego $d^2 = 2c^2$ y entonces $\frac{AD}{AB} = \frac{d}{c} = \sqrt{2}$

**Solución2**

Sea E la intersección de AC con BD, $x = AE$, $y = EC$. En tal caso $CD = x + y$, de modo que por el teorema de Pitágoras se tiene que $DE = \sqrt{x^2+2xy}$. Así se tiene que $AD = \sqrt{2x^2+2xy}$. Por otra parte es conocido que $BE = \sqrt{xy}$ ( se puede probar por la semejanza de los triángulos BEA y CEB). Así $AB = \sqrt{x^2+y^2}$ de donde $\frac{AD}{AB} = \sqrt{2}$

4. Como $(x^2 - 1)^2 \geq 0$, se tiene que $x^4 + 1 \geq 2x^2$ y similarmente como $y > 0$, $y^3 + y \geq 2y^2$, adicionando esas dos desigualdades tenemos $x^4 + y^3 + y + 1 > 2x^2 + 2y^2$, lo cual implica que $x^4 + y^3 + x^2 + y + 1 > 3x^2 + 2y^2$, sólo resta probar que $3x^2 + 2y^2 > \frac{9}{2}xy$, aplicando la desigualdad entre la media aritmética y la geométrica obtenemos $3x^2 + 2y^2 \geq 2\sqrt{6}\,xy$, y como $2\sqrt{6} = \sqrt{24} > \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{9}{2}$, se tiene lo deseado.

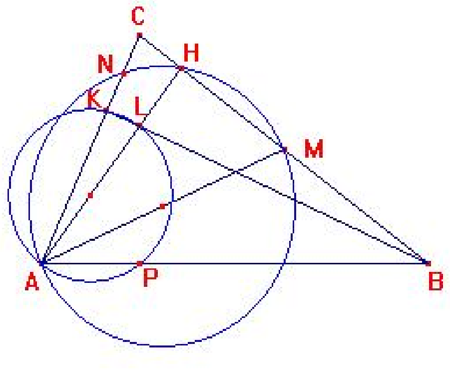
5. La última condición del problema es equivalente a decir que $a + p$ divide a $a^2 + p^2$. Notemos que todas los pares (a;p) = (p(p – 1;p), (p(2p – 1);p) cumplen las condiciones. Para el primer caso p > 2. Para ver que sirven, notemos que si (a;p) = (p(p – 1;p), entonces $a + p = p^2$, por lo que
$\frac{a^2+p^2}{a+p} = \frac{(p(p-1))^2+p^2}{p^2} = p^2 - 2p + 2$ y si (a;p) = (p(2p – 1);p), entonces $a + p = 2p^2$, por lo que $\frac{a^2+p^2}{a+p} = \frac{p(2p-1))^2+p^2}{2p^2} = 2p^2 - 2p + 1$.

Vamos a probar que no hay más parejas. Como $a^2 + p^2 = (a + p)^2 - 2ap$ se tiene que la condición dada es equivalente a que (a + p)/ 2ap. Sea a + p = d ó a + p = dp, donde d es un divisor de 2a. En el primer caso, si d = 2a, se tiene que a = p, que no está permitido, si $d \leq 2a/q \leq a$ es un divisor propio de 2a (aquí se considera que q es algún factor primo de 2a) lo que es imposible ya que a + p > a. Así que sólo el segundo caso es posible, lo que conduce a que a = p(d – 1). Pero d es un divisor de 2ª = 2p(d – 1) que es coprimo con d – 1, y por tanto d es un divisor de 2p, por lo que d = 1, 2, p, 2p. Si d = 1, 2 obtenemos que a + p = p, 2p, que conduce a que a = 0 ó a = p que no son posibles y los casos d = p, 2p nos conduce a las dos soluciones encontradas.

6. Como AM es diámetro de la circunferencia que corta a BC en H, tenemos que $\angle AHM$ es recto. Por otro lado, la potencia de C respecto a la circunferencia de diámetro AM es $CM \cdot CH$, pero como M es punto medio de BC, se tiene que:

$$\frac{BC \cdot CH}{2} = CN \cdot CA$$

de donde $\frac{BC}{CA} = \frac{2CN}{CH} = \frac{CK}{CH}$




Equivalentemente, $CB \cdot CH = CK \cdot CA$, y por lo tanto el cuadrilátero AKHB es cíclico. Como $\angle AHM$ es recto, entonces $\angle AKB$ también lo es. Luego L es el ortocentro del triángulo ABC. Por último, como AKLP es cíclico, por estar los cuatro vértices sobre la misma circunferencia, $\angle APL$ es recto, de donde la recta PL debe ser altura de ABC, y por lo tanto, pasa por . Por lo tanto C,L y P son colineales.

**Solución 2**:

Como $\frac{BM}{MC}=\frac{KN}{NC}=1$ se tiene que BK es paralela a MNpor lo que BKes perpendicular a AC y entonces BK es altura y L es el ortocentro de ABC.

Si AKLP es cíclico y como $\angle AKL$ es recto entonces también $\angle APL$ es recto, de donde la recta PL debe ser altura de ABC, y por lo tanto, pasa por C. Por lo que C, L y P son colineales.

7. Observe que: $\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}\geq\frac{1}{3}\Leftrightarrow 3\left(x^2-xy+y^2\right)\geq x^2+xy+y^2\Leftrightarrow 2(x-y)^2\geq 0$,

entonces $\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2}=\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}\cdot(x+y)\geq\frac{1}{3}(x+y)$ y usando estas desigualdades tenemos

$$\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2}+\frac{y^3+z^3}{y^2+yz+z^2}+\frac{z^3+x^3}{z^2+zx+x^2}\geq\frac{1}{3}(x+y)+\frac{1}{3}(y+z)+\frac{1}{3}(z+x)=\frac{2}{3}(x+y+z)$$

Finalmente, por la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica, y usando la condición xyz = 1, obtenemos $\frac{2}{3}(x+y+z)\geq 2\sqrt[3]{xyz}=2\sqrt[3]{1}=2$, como se quería.

8. Tomemos F sobre BC tal que AB = BF. Como AB < BC, garantizamos que F está en BC. Análogamente tomemos H sobre ED tal que AE = EH. Como AE < ED, H está en DE.
De AB + CD + EA = BC + DE se deduce que CD = CF + DH. Tomemos G en CD tal que CG = CF. Entonces también se cumplirá que GD = DH.
Como los triángulos $\Delta$BAF, $\Delta$CFG, $\Delta$DGH y $\Delta$EHA son isósceles, entonces B´, C´, D´ y E´ son respectivamente los puntos medios de AF, FG, GH y HA, por consiguiente C´B´ || GA || D´E´ y B´E´ || FH || C´D´ , concluyendo que B´C´D´E´ es un paralelogramo.

9. Está claro que y – x $\geq$ 1. Probemos que el mínimo es 1.
Sea $x = u\cdot 10^n + 9\cdot 10^{n-1} + \ldots + 9$ (1) donde u es un entero no negativo cuya última cifra no es 9. Entonces s(x) = s(u) + 9n, donde s(m) es la suma de los dígitos de m, y como $x + 1 = (u + 1)10^n$, se tiene que s(x + 1) = s(u) + 1. Por lo tanto bastará encontrar n tal que 9n $\equiv$ 1 (mód 2009), y después encontrar cualquier u tal que s(u) $\equiv$ 2008 (mód 2009) y entonces x y x + 1 pertenecen a A y su diferencia es 1.
Como 9n $\equiv$ 1 (mód 2009), se tiene que n $\equiv$ 893 (mód 2009) (2).
Como cualquier número x se puede escribir de la forma (1) para algún n y u y con la condición (2), entonces n = 893 sirve. También se tomará u el menor entero cuyo último dígito no es 9 y s(u) $\equiv$ 2008 (mód 2009). Este mínimo es u = 2999…98 donde

el número de 9 consecutivos es 222. Por lo que $x = 299\ldots9899\ldots9$ donde el 9 aparece primero 222 veces y después del 8 aparece 893 veces, entonces
$x = 299\ldots9 - 10^{893}$ donde en el primer número aparece 1115 veces el 9 y
$x = 3\cdot10^{1115} - 10^{893} - 1$. La suma de los dígitos de x es $10045 = 5\cdot2009$.