MINISTERIO DE EDUCACIÓN
Concurso Nacional de Matemática
Educación Preuniversitaria
Curso 2009- 2010
Temario Común

Nombre: ___________________________________ Grado: ____________
Escuela: _______________________________ Provincia: ______________
Municipio:___________________________Número C. I.:________________
Calificación: ____________

1. La combinación para abrir una caja fuerte es un número de cinco cifras diferentes, seleccionadas aleatoriamente del 2 al 9. Para abrir la caja fuerte se necesita además una llave que está rotulada con el número 139 921 757, que es la suma de todas las combinaciones que no abren la caja. ¿Cuál es la combinación que abre la caja fuerte?

2. Néstor le ordenó a Juan, realizar el siguiente trabajo: dibuja una circunferencia, traza uno de sus diámetros y marca los puntos extremos del diámetro con los números 1 y 2 respectivamente. Sitúa 100 puntos en cada una de las semicircunferencias que determina el diámetro trazado (diferentes de los extremos del diámetro) y marca estos puntos aleatoriamente con los números 1 y 2. Para finalizar pinta de rojo todos los segmentos pequeños que tengan marcas diferentes en sus extremos. Al pasar cierto tiempo Juan terminó el trabajo y le dijo a Néstor "pinté 47 segmentos de rojo". Muestra que si Juan no cometió errores, es falso lo que dijo.

Nota: Dos segmentos pequeños o no tienen puntos en común o sólo tienen un punto común.

3. Un rectángulo de lados n y p está dividido en np cuadraditos unitarios. Inicialmente hay m cuadraditos unitarios pintados de negro y los restantes pintados de blanco. A continuación ocurre repetidamente el siguiente proceso: si un cuadradito unitario pintado de blanco tiene al menos dos lados en común con cuadraditos pintados de negro entonces su color también se torna negro. Encuentra el menor entero m que satisface la propiedad: existe una posición inicial de m cuadraditos unitarios negros tal que todo el rectángulo $n \times p$ se pinta de negro al repetirse el proceso un número finito de veces.

SOLUCIONES

1. La suma S de todas las combinaciones posibles es un número de la forma:
$a_4 \cdot 10^4 + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$ donde todos los a_i ($i = 0,\ldots,4$) son iguales entre si e iguales a la suma 2 + 3 +… + 9 multiplicada por el número de veces en que aparece una de las cifras en la posición *i,* en todas las combinaciones posibles. Por ejemplo la cifra 2 aparece en la posición 4, 7·6·5·4 = 840 veces.
Luego $S = a_0 \cdot 11111$ = (2 + 3 +…+ 8)·840·11111 = 410 662 560 y la combinación que abre la caja es 410 662 560 – 139 921 757 = 270740803 que no es un número de 5 cifras. Por lo que no se puede abrir la caja fuerte.

2. Analicemos una de las semicircunferencias. Para este análisis la podemos considerarla como un segmento horizontal dividido en segmentos pequeños y sin perdida de la generalidad que la primera marca a la izquierda es el 1 y la última el 2. Digamos que el segmento es una casa en la que las habitaciones son los segmentos pequeños y que los extremos marcados con 1 son puertas. De esta manera tenemos tres tipos de habitaciones:
Habitaciones de paso: las marcadas con dos 1.
Habitaciones sin salida: las que tienen marcas diferentes.
Las habitaciones marcadas con dos 2, que no aportan a nuestra solución.
Si nos movemos en la casa siempre de izquierda a derecha, podemos realizar dos tipos de recorrido:
1º Entrando por la puerta de la extrema izquierda y moviéndonos hasta una habitación sin salida. Este recorrido es único y contiene una única habitación sin salida.
2º Ir de una habitación sin salida a otra habitación sin salida. No sabemos cuántos recorridos de este tipo hay, pero sí que en cada uno de ellos hay dos habitaciones sin salida.
Luego la cantidad de habitaciones sin salida es impar (2 por cada recorrido del 2º tipo y 1 por el recorrido del 1er tipo), o lo que es lo mismo en cada semicircunferencia Juan necesariamente pintó un número impar de segmentos y en total una cantidad par, mientras 47 es impar.

3. Asumamos sin pérdida de la generalidad que n ≤ p. Como en la figura, coloquemos los cuadraditos negros en la diagonal del cuadrado n x n de la parte izquierda del rectángulo. Si n < p, entonces en el rectángulo n x (p – n) de la derecha, colocamos los cuadritos negros en las intersecciones de la última fila y cada segunda columna, desde la de última a la derecha como en la figura. Sigue verificar que una posición inicial de este tipo conduce indiscutiblemente a que después de repetir el proceso un número finito de veces, todo el rectángulo se pinta de negro.
Si n y p son de la misma paridad, el número de cuadraditos negros en una posición inicial de este tipo es $m = n + \frac{p-n}{2}$, y si son de diferente paridad es
$m = n + \frac{p-n+1}{2}$. Por tanto $m = \frac{n+p+1}{2}$.
Probemos ahora que un número menor de cuadraditos unitarios no pinta de negro todo el rectángulo.
El perímetro de la región pintada de negro es invariante respecto al proceso descrito en el problema, lo que significa que puede aumentar la superficie de la región

pintada de negro pero no su perímetro. El perímetro máximo que se puede tener en cualquier posición inicial es 4m de donde si $m \leq \frac{n+p+1}{2} - 1$ y $4m \leq 4\frac{n+p+1}{2} - 4$.
Si n y p tienen la misma paridad entonces $4m \leq 2n + 2p - 4 < 2n + 2p$
Si n y p tienen diferente paridad entonces $4m \leq 2n + 2p - 2 < 2n + 2p$
Y el perímetro de todo el rectángulo es $2n + 2p$.