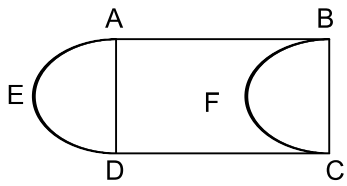
OLIMPÍADA POPULAR ESTUDIANTIL DE MATEMÁTICA
TEMARIO DE ENSEÑANZA PREUNIVERSITARIA
CURSO 2005 - 2006

Los estudiantes de 10mo grado deben resolver los problemas 1 al 14.
Los estudiantes de 11no grado deben resolver los problemas 4 al 17.
Los estudiantes de 12mo grado deben resolver los problemas 7 al 20.

1. ABCD es un rectángulo con AB = 2AD; AD y BC son diámetros de los semicírculos AED y BFC. Si AD = 6 dm. ¿Cuántos cuadraditos unidad se necesitarán en el área de ABFCDE?



2. Si el perímetro de un triángulo rectángulo isósceles es de 2t, hallar el área del triángulo.

3. Los puntos $A(1;y_1)$ y $(-1;y_2)$ están sobre la gráfica de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, c \in N$, $a \neq 1$, $a < c$, si $y_1 - y_2 = -6$, $y_1 + y_2 = 10$; hallar la ecuación de la función f.

4. Añadiendo la constante k a cada uno de los números 60, 100 y 150, respectivamente se obtiene una progresión geométrica. Determina el valor de la razón común para la sucesión.

5. Hallar el perímetro de un polígono regular si cada ángulo exterior es 10^0 menor que $\frac{1}{6}$ del ángulo interior y cada lado mide 8 cm.

6. Considera todos los triángulos isósceles que se pueden formar con los vértices de un hexágono regular de área 1. ¿Cuál es el promedio de las áreas de estos triángulos?

7. Sea $f(m;n) = f(m + 1; n - 1)$ para $m, n \in N$, $n \geq 1$ y $f(m;0) = m$. Determina $f(101;11)$.

8. Calcula el valor de la suma

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{80}+\frac{2}{80}+\ldots+\frac{79}{80}\right)$$

9. Una caja está llena de bolas de 20 colores distintos. Al azar se van sacando bolas de la caja. ¿Cuál es el menor número de bolas que deben sacarse para poder garantizar que en la colección tomada habrá al menos 100 bolas del mismo color?

10. Hallar la longitud del tercer lado de un triángulo, si se conocen dos de sus lados a y b, y se sabe que las medianas correspondientes a estos lados se cruzan formando un ángulo recto.

11. El ángulo del vértice de un triángulo, cuyos lados laterales son a y b ($a < b$), está dividido en tres partes iguales por rectas cuyos segmentos dentro del triángulo son entre sí como m:n ($m < n$). Hallar las longitudes de estos segmentos.

12. Se tiene un tablero de 9 x 8 con un número en cada casilla de modo que los números en cada fila y en cada columna están en progresión aritmética y la suma de los números en las esquinas es 2001. Determina la suma de todos los números del tablero.

13. Para escribir todos los números del $\overline{1ab}$ hasta el $\overline{ab2}$ inclusive se han empleado $\overline{1ab1}$ cifras (a y b son dígitos). ¿Cuántas cifras más se necesitan para escribir los números hasta $\overline{aab}$?

14. Hallar la relación entre el área del triángulo ABC y el área de de otro triángulo, cuyos lados son iguales a las medianas del triángulo ABC.

15. En el interior de un sector AOB de 30^0 representamos un triángulo equilátero ABC con AB $\perp$ OB. A partir de C se traza una perpendicular a OB y se forma un nuevo triángulo equilátero. Continuando el mismo proceso se trazan otros dos ángulos en ese sector. Determina la razón entre las áreas del triángulo menor y el mayor.

16. Sea M = {1, 2, 3, 4,…….., 2001}, el conjunto de los enteros positivos desde el 1 hasta el 2001. ¿Cuál es el promedio de los resultados obtenidos al sumar los enteros de cada uno de los posibles subconjuntos de M?

17. Dada la función exponencial f(x) = 6^{x^2-2x}, determina el valor mínimo de f.

18. Sea ABCD (en ese orden) un paralelogramo, AB = 10 cm, AD = 7 cm, E es un punto de CD tal que CE = 6 cm y BE = 5 cm.
a). Halla la amplitud del ángulo BEC.
b). Calcula el área del trapecio ABED.

19. De un grupo de 10 niños y 15 niñas se quiere formar una colección de 5 jóvenes que tenga exactamente 2 niñas. ¿Cuántas colecciones distintas se pueden formar?

20. En un examen de Matemática que tenía 10 preguntas se daban 5 puntos por cada respuesta correcta y se quitaban 3 puntos por cada error. Todos los alumnos respondieron todas las preguntas. Si Javier obtuvo 34 puntos, Daniel obtuvo 10 puntos y César obtuvo 2 puntos, ¿cuántas respuestas correctas tuvieron entre los tres?

SOLUCIONES

1. Los semicírculos AED y BFC tienen igual área, luego el área de ABFCDE es igual al área del rectángulo ABCD, como AB = 2AD $\Rightarrow$ AB = 12 dm y $A_{ABFCDE} = 12\cdot 6 = 72$ cm^2.

2. Sea a la hipotenusa y c cada cateto del triángulo rectángulo isósceles con a + 2c = 2t, a = $\sqrt{2}$ c, entonces $\sqrt{2}$ c + c = 2t y c = $\dfrac{2}{2+\sqrt{2}}$ t. El área es ½ c^2 = $\dfrac{1}{3+2\sqrt{2}}$ $t^2 = (3 - 2\sqrt{2})t^2$.

3.
$$\begin{array}{l} y_1 - y_2 = -6 \\ \underline{y_1 + y_2 = 10} \\ 2y_1 = 4 \Rightarrow y_1 = 2,\ y_2 = 8 \end{array} \qquad \begin{array}{l} a + b + c = 2 \\ \underline{a - b + c = 8} \\ -2b = 6 \Rightarrow b = -3 \end{array}$$

a + c = 5 entonces a = 2, c = 3 y $f(x) = 2x^2 - 3x + 3$.

4. Se tiene que (60 + k), (100 + k) y (150 + k) forman una progresión geométrica, entonces debe cumplirse que $(100 + k)^2 = (60 + k)(150 + k)$ es decir, $k^2 + 200k + 10000 = k^2 + 210k + 9000$ de donde 10k = 1000 y el valor de k es 100. Se tienen los números 160, 200 y 250 que es una progresión geométrica de razón 1,25.

5. Sean α y β las amplitudes de los ángulos interiores y exteriores respectivamente con $\beta = \dfrac{1}{6}\alpha - 10^0$,

Como $\alpha + \beta = 180^0$ entonces $7\cdot\dfrac{1}{6}\alpha = 190^0$ entonces $\alpha = \dfrac{1140^0}{7}$ y $\beta = \dfrac{120^0}{7}$ entonces $360^0 : \dfrac{120^0}{7} = 21$, entonces el polígono tiene 21 lados y su perímetro es de 168 cm.

6. ¼ .

7. f(m;1) = f(m + 1;0) = m + 1
f(m;2) = f(m + 1;0) = m + 2
………………
f(m;n) = f(m + 1;n – 1) = m + n

Luego f(101;11) = f(100 + 1; 10 + 1)
= 100 + 12 = 112

8. ½ + (1) + (1 + ½) + (2) + (2 + ½) + … + (39 + ½) = 1580.

9. Noten que si se sacan 20 bolas, podría ser que todas fueran de colores distintos, así que sólo podríamos garantizar que hay dos bolas del mismo color si se sacan 21 bolas (aquí se aplicó el Principio de las Casillas). De la misma manera, se necesitan 41 = (20·2 + 1) bolas para poder afirmar que con seguridad hay 3 bolas (al menos) del mismo color, pues con 40 bolas podría ser que cada color apareciera exactamente 2 veces. Con el mismo razonamiento que hemos seguido llegamos al resultado.
$\therefore$ Se necesitan 20 · 99 + 1 = 1981 bolas.

10. Sea un ΔABC, D y E puntos medios de AC y BC respectivamente, AC = b; BC = a, OD = x y OE = y. Hallemos AB = c

$4x^2 + y^2 = \dfrac{b^2}{4}$; $4x^2 + 4y^2 = c^2$, $4x^2 + 16y^2 = a^2$. Eliminando x e y obtendremos $c^2 = \dfrac{a^2+b^2}{5}$ y

$c = \dfrac{\sqrt{5(a^2+b^2)}}{5}$.

11. Sean A, D ,E y B alineados en ese orden. Admitamos que $\angle ACD = \angle DCE = \angle ECB = \alpha$ y CE = x, CD = y. Para (ABC) ((ABC representa el área del triángulo ABC) se pueden escribir las tres expresiones siguientes:

(ACD) + (DCB) = $\dfrac{1}{2}$ by senα + $\dfrac{1}{2}$ ay sen2α

(ACE) + (ECB)=) = $\dfrac{1}{2}$ bx sen2α + $\dfrac{1}{2}$ ax senα + (ACD) + (DCE) + (ECB)

$= \frac{1}{2}$ by senα + $\frac{1}{2}$ xy senα + $\frac{1}{2}$ ax senα

Igualando las partes izquierdas de estas igualdades y teniendo en cuenta la condición del problema obtenemos un sistema de ecuaciones de tres ecuaciones:

$$2a\cos\alpha = x + a\frac{x}{y} \qquad 2b\cos\alpha = y + b\frac{y}{x} \qquad \frac{x}{y} = \frac{m}{n}$$

Resolviendo obtenemos que: $x = \dfrac{\left(n^2 - m^2\right)ab}{n\left(bm - an\right)}$ $\qquad$ $y = \dfrac{\left(n^2 - m^2\right)ab}{m\left(bm - an\right)}$.

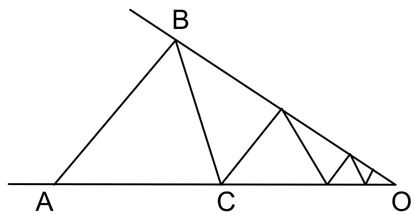
12. 36018

13. 42

14. Sea O el punto de intersección de las medianas en el ΔABC. En la prolongación de la mediana BE trazamos ED = OE . Según la propiedad de las medianas, los lados del ΔCDO son iguales a $\frac{2}{3}$ de los lados del triángulo compuesto por las medianas. Designando el área de este último por S_1, tenemos:

$S_1 = \frac{9}{4}$ (CDO). Por otro lado, el ΔCDO está formado por dos, y el ΔABC por 6 triángulos equidimensionales al ΔCEO. Por eso (CDO) = $\frac{1}{3}$ (ABC) y por consiguiente $\dfrac{s_1}{(ABC)} = \dfrac{3}{4}$.

15. En ΔAOB se tiene que



sen 30^0 = $\dfrac{AB}{OA} = \dfrac{l_1}{OA}$ entonces OA = $2l_1$

y OC = AC = l_1 de esta forma $l_4 = \dfrac{l_1}{8}$

$A_4 : A_1 = (l_4)^2 : (l_1)^2 = \dfrac{1}{64}$.

16. $\dfrac{2003001}{2}$.

17. La función f es una función exponencial con base mayor que 1 por lo que una función creciente que alcanza su valor mínimo para el menor valor del exponente.

Como la representación gráfica de $x^2 - 2x$ es una parábola que abre hacia arriba, alcanza su valor mínimo en la ordenada del vértice, que es -1 para x = 1.

$\therefore 6^{-1} = \frac{1}{6}$ que es el valor mínimo de f.

18. a). AB = CD = 10 cm; AD = BC = 7 cm; CE = 6 cm $\Rightarrow$ DE = 16 cm y BE = 5 cm.

cos $\angle$BEC = $\dfrac{BE^2 + CE^2 - BC^2}{2BE\cdot CE} = \dfrac{1}{5}$, por lo que $\angle$BEC = arcos $\frac{1}{5}$.

b). La altura del trapecio coincide con la altura del triángulo BCE. Sea h la altura buscada entonces

h = $\dfrac{2\sqrt{9\cdot 2\cdot 4\cdot 3}}{6}$ = $2\sqrt{6}$ cm entonces A_{ABED} = ½ (AB + DE)·h = ½ (10 + 16)· $2\sqrt{6}$ = $16\sqrt{6}$ cm^2.

19. La elección de las 2 niñas se puede hacer de $\binom{15}{2} = \frac{15 \cdot 14}{2!} = 105$ formas. Como debe ser 5 en total y debe haber 2 niñas exactamente, entonces los niños serán 3; estos se pueden escoger de $\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = 120$ formas. Por tanto el resultado es 105·120 = 12600.

20. La forma de calificar el examen es equivalente a darle a cada alumno 50 puntos al inicio del examen y quitarle 8 puntos por cada respuesta incorrecta.
Entre los tres alumnos perdieron 150 – (34 + 10 + 2) = 104 puntos, así que fallaron en 104:8 = 13 respuestas.
Entre los tres contestaron 30 – 13 = 17 preguntas acertadamente.

NOTA: Cada pregunta tiene un valor de 1 punto

MEDALLISTAS

ORO ----------------------- 13 ó 14 puntos
PLATA -------------------- 11 ó 12 puntos
BRONCE------------------9 ó 10 puntos