OLIMPIADA POPULAR ESTUDIANTIL DE MATEMÁTICA
TEMARIO DE ENSEÑANZA SECUNDARIA BÁSICA
CURSO 2005 – 2006

Los estudiantes de 7mo grado deben resolver los problemas 1 al 14.
Los estudiantes de 8vo grado deben resolver los problemas 4 al 17.
Los estudiantes de 9no grado deben resolver los problemas 7 al 20.

1. Si $200 \leq a \leq 400$ y $600 \leq b \leq 1200$, determina el mayor valor posible del cociente $\frac{b}{a}$.

2. El número de seis cifras $\overline{1k31k4}$ es un múltiplo de 12 pero no es divisible por 9. Hallar k.

3. Halla la suma de todos los enteros entre 50 y 350, los cuales terminan en 1.

4. Considera los números de 5 cifras formados por los dígitos 1 y 2. Halla en cuántos de ellos el uno aparece más veces que el 2.

5. Hallar $n \in N$ si n $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = 95040$.

6. Se tienen dos rectas paralelas a y b que son cortadas por una recta c transversal a ellas (no necesariamente perpendicular a ambas). ¿Cuántos puntos hay que estén a la misma distancia de las tres rectas?

7. Un número palindrómico es aquel que se lee igual de derecha a izquierda que de izquierda a derecha. Sea A la cantidad de números palindrómicos que hay entre 100 y 200, B la cantidad de números palindrómicos que hay entre 1000 y 2500. Hallar A + B.

8. ¿Cuántos números de cuatro cifras se pueden tomar al menos para que sea seguro que dos de ellos tengan la misma suma?

9. Dados los números: a = 2^{4^3} ; b = 3^{4^2} y c = 4^{2^3} , ordénalos de mayor a menor.

10. ¿Cuál es el resultado de elevar al cuadrado el número 99…9, que contiene en total 100 dígitos 9?

11. Consideremos la sucesión numérica 1, 3, 5, 7, 9, llamemos S_n a la suma de los n primeros términos de la sucesión, es decir, $S_1 = 1$, $S_2 = 1 + 3 = 4$, $S_3 = 1 + 3 + 5 = 9$, $S_4 = 16$ y $S_5 = 25$, cumpliéndose que $S_n = n^2$.
De una cierta sucesión numérica se conoce que la suma de los n primeros términos es $n(n + 1)(n + 2)$. Determina el valor del décimo término de dicha sucesión.

12. ¿Cuántos enteros positivos menores que 2004 existen tales que si su ultimo digito es borrado el entero es divisible por el nuevo numero?

13. Decimos que un número es cuadradísimo si satisface las siguientes condiciones:
(i) todos sus dígitos son cuadrados,
(ii) es un cuadrado perfecto,
(iii) si separamos el número en parejas de dígitos de derecha a izquierda, estas parejas son cuadrados perfectos si los consideramos como números de 2 dígitos,
¿cuántos números menores que 2005 son cuadradísimos?

14. Considera un trapecio isósceles ABCD (en ese orden, y sentido antihorario), AB base menor, tal que AD = AB = BC = 1 y CD = 2, ¿cuál es la amplitud del ángulo CAD?

15. ¿Cuántas rectas determinan 12 puntos sabiendo que no hay 3 de ellos que sean colineales?

16. Sea $\theta(n)$ la cantidad de enteros positivos menores o iguales que el entero positivo n y primos relativos con n, calcular $\theta(18)$.

17. Se tiene que $2^{a+1} + 2^a = 3^{b+2} - 3^b$ donde a y b son enteros positivos, determina los valores de a y b.

18. La suma de dos números naturales es 968. Uno de los sumandos es divisible por 10. Si se tacha la última cifra de uno de los números se obtiene el otro sumando. Determina estos dos números.

19. Se tiene un cuadrilátero convexo que cumple las siguientes condiciones:
i). 3 de los ángulos interiores son iguales.
ii). γ_1 es un ángulo exterior al cuadrilátero, adyacente a uno de los ángulos iguales.
iii). γ_2 es un ángulo exterior al cuadrilátero, adyacente al ángulo desigual.
Determina la amplitud de γ_2 en función de γ_1.

20. En una reunión juvenil con 47 participantes, Ana es conocida por 16 jóvenes hombres, Berta por 17, Carmen por 18, … Zenayda, la última hembra es conocida por todos los jóvenes hombres que asistieron a la reunión. ¿Cuántos jóvenes de cada sexo había?

SOLUCIONES

1. El mayor valor posible de $\frac{b}{a}$ será el que se forme con el mayor valor de b y el menor valor de a, es decir 1200:200 = 6.

2. K = 0; 6 para que sea divisible por 4. Si k = 0 el número original es divisible por 9, entonces k = 6.

3. 5880.

4. 16

5. Se tiene que $95040 = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11$, de aquí tenemos que formar 5 números consecutivos cuyo producto sea 95040, estos son 8, 9, 10, 11 y 12, por lo que n = 12.

6. El conjunto de puntos que equidista de de a y b es una línea paralela a éstas que pasa entre ellas (llamémosle r)
Llamaremos P, al punto de intersección de la recta c con la recta a.
Para encontrar los puntos que también equidisten de c, trazamos las bisectrices de los ángulos formados por a y c y consideremos los puntos donde estas bisectrices cortan a r. Así de esta manera, obtenemos sólo dos puntos que equidistan de las tres rectas dadas.

7. Los números palindrómicos entre 100 y 200 son: 101, 111, 121, …., 191, entonces A = 10.
Los números palindrómicos entre 1000 y 2500 son: 1001, 1111, 1221, …., 1991, 2002, 2112, 2222, 2332, 2442 entonces B = 15 por lo que A + B = 25.

8. Los números de cuatro cifras van desde 1000 hasta 9999 donde la suma de sus dígitos va desde 1 hasta 36, son 36 sumas posibles, luego, si escogemos 37 números ya se garantiza que haya dos de ellos con la misma suma.

9. $A = 2^{64}$; $b = 3^{16}$ y $c = 4^8 = 2^{16}$ como $a > c$ y $b > c$ entonces c es el menor,
$2^{64} = (2^3)^{16} \cdot 2^{16} = 8^{16} \cdot 2^{16}$ luego $a > b$ y se cumple que $a > b > c$.

10. $9^2 = 81$; $99^2 = 9801$; $999^2 = 998001$; $9999^2 = 99980001$ entonces $99…9^2$ compuesto por 100 dígitos nueves es igual a 99…9800…01 que tiene 99 nueves y 99 ceros.

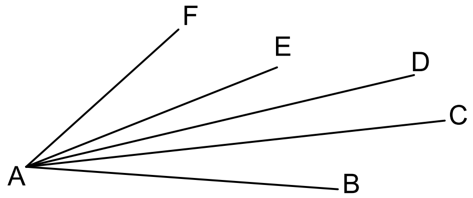
11. Si S_n representa la suma de los n primeros términos, entonces el décimo término será igual a
$S_{10} - S_9$
$S_{10} = 10(11)(12) = 1320$; $S_9 = 9(10)(11) = 990$ entonces $S_{10} - S_9 = 330$ que es el valor del décimo término de la sucesión.

12. 223

13. 8

14. Desde B tracemos la perpendicular BE con E en el segmento CD. Tenemos que CE = $\frac{1}{2}$. Considerando el ΔBCE, tenemos que podemos llegar a que $\angle$CBE = 30^0 (ya sea por tener el conocimiento del teorema del ángulo de 30^0 ó haciendo la construcción auxiliar que se hace para demostrar este teorema), como el trapecio es isósceles, tenemos que $\angle$ABC = 120^0, además sabemos que el ΔABC es isósceles, es decir, $\angle$BCA = $\angle$CAB = 30^0 por lo que $\angle$CAD = 90^0.

15. Analicemos lo que sucede para 6 puntos
y después ampliemos el análisis para 12.



AB	BC	CD	DE	EF
AC	BD	CE	DF	
AD	BE	CF		
AE	BF			
AF				

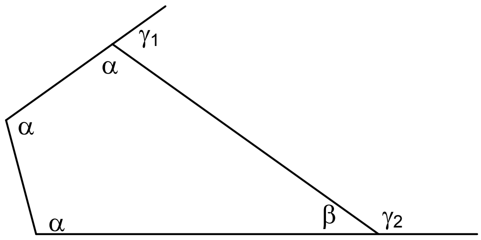
Total 15 entonces para 12 puntos debe cumplirse 1 + 2 + 3 + ... + 11 = 66.

16. 18 = $2 \cdot 3^2$, entonces los números primos relativos con18 y menores o iguales que él son:
1, 5, 7, 11, 13, 17 luego $\theta(18) = 6$.

17. De $2^{a+1} + 2^a = 3^{b+2} - 3^b$ se tiene que $3 \cdot 2^a = 2^3 \cdot 3^b$, como 2 y 3 son primos relativos, la única posibilidad de que se cumpla la igualdad es para a = 3, b = 1.

18. 968 = $\overline{ab0} + \overline{ab}$ por ser uno de ellos divisible por 10 entonces 100a + 10b + 10a + b = 968
110a + 11b = 968 y 10a + b = 88.
$\therefore$ Los números son 880 y 88.

19. Se tiene que $\gamma_1 + \alpha = 180^0$ y $\gamma_2 + \beta = 180^0$,
sumando ambas ecuaciones se tiene que
$\gamma_1 + \alpha + \gamma_2 + \beta = 360^0$
pero $3\alpha + \beta = 360^0$ y $\beta = 360^0 - 3\alpha$ luego
$\gamma_1 + \gamma_2 + 360^0 - 3\alpha = 360^0$
$\gamma_2 = 2\alpha - \gamma_1$ pero $\alpha = 180^0 - \gamma_1$ entonces $\gamma_2 = 360^0 - 3\gamma_1$



Otra vía pudiera ser si conoce la propiedad de la suma de los ángulos exteriores de un polígono cualquiera aplicarla.

20. Sea x el número de mujeres; y el número de hombres, entonces x + y = 47, pero como desde Ana hasta Zenayda se cumple que 15 + x = y entonces y – x = 15. Hay que buscar dos números enteros positivos que sumen 47 y su diferencia sea 15, estos son 31 y 16.
$\therefore$ había 16 mujeres y 31 hombres.

NOTA: Cada pregunta tiene un valor de 1 punto

MEDALLISTAS
ORO ---------------------- 13 ó 14 puntos
PLATA ------------------- 11 ó 12 puntos
BRONCE------------------9 ó 10 puntos