¿Saben tus alumnos demostrar? ¿Cómo enseñarlos?

Autoras: MsC. Mayra Rodríguez Aruca
MsC. Judith Fernández Ávila

Desde edades tempranas, y de forma propedéutica, el niño comienza a identificar diferentes figuras geométricas, entre las cuales se encuentra *el triángulo*. De esta figura conoce, a partir del primer grado, los elementos que lo caracterizan, a saber, sus lados y sus ángulos. En cuarto grado se define y conoce la clasificación según sus lados; pero no es hasta sexto grado que realiza la clasificación de esta figura atendiendo a sus ángulos. En este mismo grado estudia las relaciones fundamentales entre sus lados y ángulos.

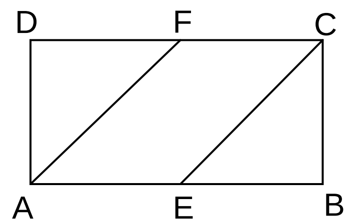
En séptimo grado se comparan los figuras estudiadas sobre la base de sus características, estableciendo sus semejanzas y diferencias, es decir, se sistematizan los conocimientos que poseen los alumnos sobre las figuras geométricas planas fundamentales, y en particular, se estudian las rectas notables en un triángulo, es decir, se definen, se analizan las propiedades características y se trazan las mediatrices, las alturas, las medianas y las bisectrices de un triángulo.

No es hasta el octavo grado que los alumnos, al estudiar la igualdad de triángulos, poseen un medio matemático apropiado para comenzar a realizar ejercicios sencillos de demostración. La contribución esencial que tiene el tratamiento de este contenido en la escuela está vinculada con el desarrollo del pensamiento lógico mediante la búsqueda de la idea de la demostración. Es, en este momento, que los alumnos del nivel básico comienzan a realizar demostraciones matemáticas de manera formal; es precisamente ante este tipo de ejercicios es donde los alumnos presentan marcadas dificultades; por lo que, en primer lugar, habría que reflexionar sobre la forma en que este contenido es tratado.

La meta a que se aspira al trabajar la igualdad de triángulos en octavo grado es que los alumnos sepan realizar ejercicios de cálculo geométrico y de demostración, aplicando las propiedades de los triángulos y cuadriláteros que requieran de los criterios de igualdad. Para lograr este objetivo, el docente debe estructurar adecuadamente las acciones que debe ir desarrollando por etapas, de forma tal, que el dominio de unas constituya el aseguramiento de las siguientes. Por ejemplo, si se quiere probar que dos triángulos son iguales, pero estos aparecen relacionados con otras figuras geométricas, y de estas no se domina su definición y propiedades fundamentales, entonces es poco probable tener éxito al demostrar dicha igualdad.

Veamos el ejemplo siguiente:

Sea ABCD un rectángulo, E y F los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ respectivamente. Demuestra que Δ ADF = Δ BCE.



Si el alumno no conoce que los lados opuestos del rectángulo son iguales, así como sus cuatro ángulos interiores, y que el punto medio de un segmento divide a este en dos segmentos iguales, no podrá probar lo que se pide, pues no logrará justificar la igualdad entre tres parejas de elementos adecuadamente seleccionados.

Como se expuso anteriormente, es en octavo grado donde los alumnos se enfrentan por primera vez a un ejercicio de demostración, por lo que el trabajo con este tipo de ejercicios debe hacerse cuidadosamente y propiciando que los alumnos se apropien de un modo de actuación para resolverlos; en otras palabras, el alumno debe ser orientado respecto a las acciones que generalmente se siguen para realizar una demostración, en este caso geométrica. Hay que tener presente que muchos de nuestros alumnos tratan de memorizar o reproducir una determinada demostración ante la imposibilidad de poderla realizar de manera independiente y después de haberla copiado del pizarrón o del cuaderno de otro alumno, constituyendo esto un grave error, pues una demostración no es objeto de asimilación, lo interesante es que los alumnos aprendan el método empleado.

Las acciones a las que hicimos referencia anteriormente pueden ser inducidas a través de preguntas tales como:

- *¿Qué es lo dado y qué es lo buscado?*
- *¿Qué nos ayudaría a interpretar geométricamente la situación dada?*

- *¿Qué conceptos y teoremas conoces que están relacionados con lo dado y con lo buscado?*
- *¿Cuáles de esos conceptos y teoremas puedes utilizar y en qué orden lo harías?*
- *¿Cómo quedaría escrita la demostración?*
- *¿Cómo procediste para buscar la idea de la demostración?*
- *¿Qué acciones te resultaron útiles realizar?*
- *¿Existirá otra forma o vía para realizar esta demostración?*

A continuación se expondrá un ejemplo de una conversación de clase donde el profesor realiza una demostración sobre igualdad de triángulos. Para ello se empleará la siguiente leyenda:

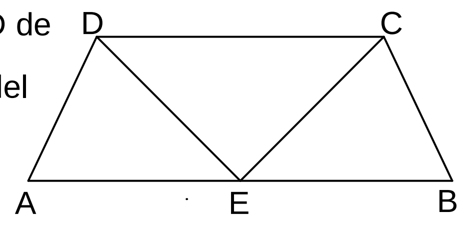
[P]: Indicaciones del profesor.

[A]: Acciones que realizan los alumnos o respuestas que estos deben dar.

En la conversación de clase que se presenta se ha considerado que los alumnos responden favorablemente a las preguntas o impulsos que ofrece el docente; de no obtenerse la respuesta adecuada, este debe disminuir el nivel de la exigencia de forma diferenciada hasta lograr la respuesta deseada. Esto último queda explícito a través de los paréntesis que aparecen en las intervenciones del profesor.

En la figura se representa el trapecio isósceles ABCD de bases $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. El punto E es el punto medio del lado $\overline{AB}$.

Probar que Δ ADE = Δ BCE.



[P]: Les sugiero que lean detenidamente el ejercicio y digan sobre qué trata el mismo. (… ¿Qué nos piden en el ejercicio?).

[A]: Probar que los triángulos ADE y BCE son iguales.

[P]: Eso significa que estamos en presencia de un ejercicio geométrico de demostración; bueno, ¿qué debemos hacer a continuación?, (… ¿qué datos nos dan para probar la igualdad de esos triángulos?).

[A]: Lo que debemos hacer ahora es extraer los datos del ejercicio.

[P]: ¿Qué conocemos sobre lo dado y sobre lo buscado?, (… ¿qué significa que ABCD sea un trapecio isósceles y que E sea el punto medio de $\overline{AB}$?).

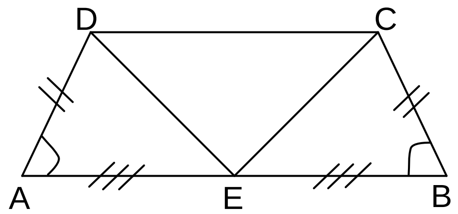
[A]: De los datos dados se puede decir que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overline{AD} = \overline{BC}$ y $\overline{AE} = \overline{BE}$.

[P]: Bien, como ya hemos analizado, estamos ante un ejercicio geométrico de demostración; ¿qué es lo más recomendable hacer de inmediato?, (…¿no nos ayudaría destacar los datos en la figura?).

[A]: Señalar los datos en la figura.

[P]: Les propongo que lo hagan.

[A]:



[P]: Si se quiere probar la igualdad entre dos triángulos, ¿qué teoremas o conceptos son posibles de aplicar? (… ¿qué teoremas nos permiten demostrar la igualdad de triángulos?).

[A]: Los criterios de igualdad de triángulos (l.a.l; a.l.a; l.l.l).

[P]: Analizando los datos representados en la figura, ¿cuál o cuáles de los tres criterios de igualdad de triángulos serían posibles de aplicar?, ¿por qué?, (… ¿de cuántos lados y ángulos tenemos información?; ¿qué posición tienen entre si los ángulos y lados señalados en la figura?).

[A]: En este caso se puede aplicar el criterio l.a.l., pues tenemos por datos dos lados respectivamente iguales así como el ángulo comprendido entre esos lados en cada triángulo.

[P]: ¿Qué haríamos ahora?

[A]: Escribir en nuestros cuadernos la demostración.

[P]: Traten de escribir de manera independiente dicha demostración.

[A]: En los triángulos ADE y BCE se tiene:

(1) $\overline{AE} = \overline{BE}$ por ser E el punto medio de $\overline{AB}$.

(2) $\overline{AD} = \overline{CB}$ por ser lados del trapecio isósceles ABCD.

(3) $\angle DAE = \angle CBE$ por ser ángulos base de un trapecio isósceles.

De (1), (2) y (3) resulta que Δ ADE = Δ BCE, por tener dos lados y el ángulo comprendido respectivamente iguales (l. a. l.).

[P]: ¿Existe otra vía o forma para realizar la demostración? (Con los datos dados, ¿se podría haber usado otro criterio de igualdad?; ¿se podría haber empleado el criterio l.l.l?, ¿por qué?, ¿tenemos alguna información sobre la relación que existe entre $\overline{CE}$ y $\overline{DE}$?).

[A]: No.

[P]: ¿Se podría haber aplicado el criterio a.l.a?; ¿por qué?,(…¿es posible obtener alguna información sobre las amplitudes de las parejas de ángulos $\angle$ AED y $\angle$ CEB, y $\angle$ ADE y $\angle$ BCE?)

[A]: No.

[P]: ¿Cómo se procedió para buscar la idea de la demostración?, (…¿qué razonamientos seguimos para llegar a concluir que el criterio a aplicar era el l.a.l?

[A]: (Los alumnos deben describir oralmente los pasos que se siguieron para llegar a realizar la demostración).

[P]: Analizando la demostración realizada; ¿qué conclusión podemos extraer acerca del triángulo CDE y su relación con el trapecio isósceles?, (… ¿qué se puede inferir sobre las longitudes de los lados $\overline{CE}$ y $\overline{DE}$?, ¿qué ocurre con los elementos homólogos en triángulos iguales?; ¿no es el triangulo DCE isósceles de base $\overline{CD}$?).

[A]: En todo trapecio isósceles, el triángulo que se forma al unir el punto medio de una de sus bases con los extremos de la otra base es isósceles.

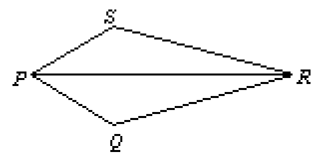
[P]: Si el punto E en lugar de estar situado sobre la base mayor del trapecio, estuviera sobre la base menor, ¿qué ocurriría? Analicen.

[A]: (Los alumnos valorarían que la demostración sería exactamente igual, y por tanto, se obtendría la misma conclusión).

Ahora quisiéramos realizar algunas reflexiones sobre los ejercicios de demostración de igualdad de triángulos que deben considerarse en octavo grado.

Un ejercicio de cualquier tipo no es por si solo ni fácil ni difícil; tal discriminación depende, en última instancia, del dominio de los conocimientos y habilidades que los alumnos hayan alcanzado con relación a un determinado contenido. En tal sentido para estructurar adecuadamente una colección de ejercicios, el docente debe tener en cuenta el diagnóstico de sus alumnos para de esa manera realizar una correcta diferenciación de la enseñanza. Poseer un adecuado diagnóstico del nivel alcanzado por sus alumnos, le permitirá al docente realizar una real *selección de la dificultades*[♦].

Veamos el ejemplo siguiente: Sea PQRS un cuadrilátero tal que $\overline{PR}$ es la bisectriz del $\angle SPQ$ y $\overline{PS} = \overline{PQ}$.



Clasifica el cuadrilátero PQRS. Fundamenta tu respuesta.

Este ejercicio concebido de esta forma está dirigido a alumnos que han logrado mayor nivel de desempeño en relación con la conveniencia de aplicar la igualdad de triángulo, como vía para demostrar que dos segmentos son iguales. En tal sentido para buscar qué relación existe entre los segmentos que forman los lados del cuadrilátero, resultaría muy apropiado probar que los triángulos PQR y PRS son iguales. Al arribar a esa afirmación se obtiene que $\overline{QR} = \overline{RS}$ y como por datos $\overline{PQ} = \overline{PS}$, se puede concluir que dicho cuadrilátero es un trapezoide simétrico. Sin embargo, para otros alumnos este ejercicio pudiera tener la orden siguiente:

a) Prueba que $\overline{QR} = \overline{RS}$.

b) Diga qué nombre recibe el cuadrilátero PQRS. Fundamenta tu respuesta.

Coincidirás con nosotros que, diseñado así el ejercicio, está dirigido a alumnos con un buen nivel de desempeño, pero por debajo de los de la primera versión.

Para alumnos con menos habilidades desarrolladas en estos ejercicios de demostración sobre igualdad de triángulos, se pudiera añadir otro inciso en relación con el anterior, es decir, la orden de dicho ejercicio sería:

[♦] Se entiende por selección de dificultades a la determinación de las posibles dificultades que pueden presentar los alumnos al enfrentarse a un determinado ejercicio.

a) Demuestra que Δ PQR = Δ PRS.

b) Justifica por qué $\overline{QR} = \overline{RS}$.

c) Diga qué nombre recibe el cuadrilátero PQRS. Fundamenta tu respuesta.

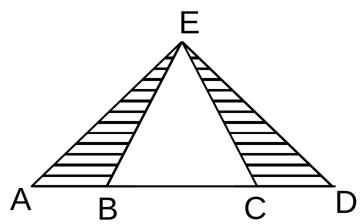
Si retomamos el ejercicio del ejemplo, podemos decir que, bajo esas mismas condiciones, el ejercicio pudiese ser considerado como de mayor dificultad si la orden fuese: Demuestra que el triángulo CDE es isósceles de base $\overline{CD}$. De mayor complejidad sería aún, si la orden dijese: Investigue qué tipo de triángulo es CDE.

Lo que se ha mostrado anteriormente debe servir de ejemplo de cómo adecuar, según los niveles de desempeño alcanzados por nuestros alumnos, las ordenes de los ejercicios, en este caso, sin variar las condiciones dadas. En otros casos también es posible adecuar los datos o condiciones que se indican en el ejercicio.

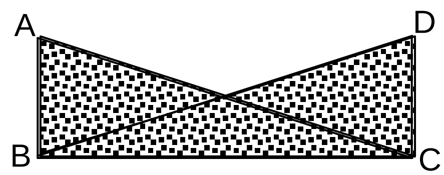
De manera general se pudiera plantear que los ejercicios de demostración que deben realizar los alumnos en octavo grado relacionados con la igualdad de triángulos pueden graduarse de la forma siguiente:

Dificultades en cuanto a la representación gráfica.

I. Se da la figura y en ella aparecen representados los triángulos sin superposición entre ellos.



II. Se da la figura y en ella se encuentran los triángulos superpuestos. El nivel de dificultad será mayor en la medida que se tracen más triángulos en la figura.



Dificultades en cuanto a los elementos dados.

I. En los datos se brindan dos de los elementos necesarios para la demostración y el alumno debe encontrar solamente uno más para poder aplicar un criterio dado.

II. En los datos se brinda uno de los elementos necesarios para la demostración y los otros dos, deben ser buscados por el alumno a partir de la aplicación de definiciones o de procedimientos de adición y/o sustracción de longitudes de lados y/o amplitudes de ángulos. (Estos dos elementos no quedan explícitos; el alumno los debe determinar).

Dificultades en cuanto a lo buscado.

I. Se le pide directamente al alumno que demuestre la igualdad entre dos triángulos.

II. No se pide directamente probar que los triángulos son iguales, sino que se puede indicar probar:

- una igualdad entre segmentos,
- una igualdad entre ángulos,
- una propiedad de alguna figura geométrica.

Estas dificultades si se presentan aisladas determinan un nivel de exigencia para el alumno, pero si las mismas se combinan, el nivel de complejidad del ejercicio irá aumentando. De esta forma un mismo ejercicio, como se ejemplificó anteriormente, puede ser utilizado para el alumno con pocas habilidades para demostrar, para el alumno promedio, y también para que el alumno de alto rendimiento continúe su desarrollo en la línea de las demostraciones.

Para finalizar haremos algunas reflexiones sobre los errores más frecuentes que comenten los alumnos al enfrentarse a un ejercicio de demostración de igualdad de triángulos.

- Prefijar el criterio de igualdad a utilizar sin tener en cuenta los datos que se aportan en el ejercicio.
- No identificar en figuras compuestas los triángulos que deben seleccionar para realizar la demostración.
- No poder determinar con precisión los elementos homólogos.
- No representar adecuadamente la demostración, es decir, escribirla en dos columnas donde en una de ellas aparecen detallados los pasos de la demostración y en la otra la fundamentación correspondiente a cada paso.

Bibliografía:

- Ballester Pedroso, S. y otros. **Metodología de la Enseñanza de la Matemática (Tomo 1).** Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1992.

- Colectivo de Autores. **Libro de texto de Matemática para séptimo grado**. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana. 1991.

- Colectivo de Autores. **Programa de Matemática (octavo grado)**. Editorial Pueblo y Educación. Cuidad de la Habana. 2004.