LOS PROCEDIMIENTOS DE SOLUCIÓN CON CARÁCTER HEURÍSTICO EN LAS CLASES DE MATEMÁTICA.

MATERIAL DOCENTE.

ELABORADO POR: MSc. Judith Fernández Ávila.
MSc. Margarita Gort Sánchez.

Mayo de 1999.

LA HEURÍSTICA Y SU UTILIDAD EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA.

La heurística como disciplina científica es relativamente joven, y en épocas muy recientes es que aparecen sistematizados los procedimientos heurísticos en la literatura pedagógica. El vocablo "heurística" o "euristica" proviene del griego y significa: hallar, descubrir, inventar.

Aunque desde la época de los griegos los grandes maestros de matemática han abogado porque se utilicen los elementos heurísticos en la enseñanza de esta ciencia, aún no se ha logrado que todos los docentes los conozcan y los utilicen en sus clases o, lo que es más, que desarrollen una verdadera enseñanza heurística.

Si bien el método heurístico de enseñanza, ha sido utilizado desde la antigüedad, y es conocido hoy en día por gran parte de los profesores de matemática, queremos destacar que existen diferencias entre método heurístico e instrucción heurística, lo que aclararemos a continuación.

El método heurístico se caracteriza como un método de enseñanza mediante el cual se les plantean a los alumnos preguntas, sugerencias, indicaciones, a modo de impulsos que facilitan la búsqueda independiente de problemas y de soluciones estos, donde el maestro no le informa a los alumnos los conocimientos terminados que se someterán a su asimilación, sino los lleva al redescubrimiento de las suposiciones y reglas correspondientes, de forma independiente. Su actividad consiste en conducir al alumno a la búsqueda del conocimiento objeto de estudio, estimular su reflexión, guiarlo para que indague, investigue y llegue a conclusiones; para lo cual, los impulsos que se plantean a los estudiantes deben ser formulados con claridad e inteligentemente, y presentados en el momento preciso.

Pero existen diferencias entre este trabajo y lo que entendemos por instrucción heurística.

La instrucción heurística es la enseñanza consciente y planificada de reglas generales y especiales de la heurística para la solución de problemas, para lo cual es necesario que cuando se declaren por primera vez las mismas explícitamente; se destaquen de un modo claro y firme, y se recalque su importancia en clases posteriores hasta que los alumnos las aprendan y las utilicen independientemente de manera generalizada, por lo que debe ejercitarse su uso en numerosas y variadas tareas.

El empleo de la instrucción heurística en la clase de Matemática, contribuye a lograr:

- la independencia cognoscitiva de los alumnos
- la integración de los nuevos conocimientos,
- con los ya asimilados.
- el desarrollo de operaciones intelectuales tales como: analizar, sintetizar, comparar,

clasificar, etc., y de las formas de trabajo y de pensamiento fundamentales de la ciencia matemática: variación de condiciones, búsqueda de relaciones y dependencias, y consideraciones de analogía.
- la formación de capacidades mentales, tales como: la intuición, la productividad, la originalidad de las soluciones, la creatividad, etc.

La actividad heurística o los procesos heurísticos incluyen en si las operaciones intelectuales como su componente fundamental, a la vez que tienen cierta especificidad. Precisamente por eso, la actividad heurística se debe analizar como variedad del pensamiento humano, la que crea un nuevo sistema de acciones o abre regularidades desconocidas hasta entonces, de los objetos que rodean al hombre [u objetos de la ciencia a estudiar].

El objetivo principal de la Heurística es investigar las reglas y métodos que conducen a los descubrimientos y a las invenciones e incluye la elaboración de principios, reglas, estrategias y programas que facilitan la búsqueda de vías de solución a problemas (tareas de carácter no algorítmico de cualquier tipo y de cualquier dominio científico o práctico).

Algunos autores consultados clasifican los elementos heurísticos en dos categorías: procedimientos heurísticos y medios auxiliares heurísticos.

Los medios auxiliares heurísticos más importantes son:
- las figuras ilustrativas, esbozos o figuras de análisis
- las tablas (para reflejar las relaciones entre datos)
- los compendios y mementos (que contienen las definiciones de los conceptos fundamentales, los teoremas más necesarios, etc.)

Los procedimientos heurísticos apoyan la realización consciente de actividades mentales complejas y exigentes. La introducción de estos procedimientos en la clase y su aplicación por parte de los alumnos propicia la asimilación de los conocimientos, su capacidad para resolver problemas para los cuales no conocen procedimientos algorítmicos y el desarrollo del pensamiento creador.

LOS PRINCIPIOS HEURÍSTICOS

Los principios heurísticos son de gran utilidad para la búsqueda de nuevos conocimientos y también sugieren ideas para la solución de diferentes problemas.
Dentro de los principios heurísticos generales se destacan el de analogía, el de reducción y el de inducción. Analicemos cada uno de ellos.

PRINCIPIO DE ANALOGÍA

El principio de analogía consiste en la utilización de semejanzas de contenido o de forma.
George Polya, destacado profesor de Matemática húngaro en su libro: Matemática y pensamiento plausible expresa:
Analogía es una especie de semejanza sobre un nivel definido y conceptual... La diferencia esencial entre analogía y otras clases de semejanza yace, en las intenciones de pensador. Objetos semejantes son aquellos que concuerdan entre sí en algún aspecto. Si usted trata de delimitar el aspecto en que concuerdan... usted mira estos objetos semejantes como análogos. Y añade... Dos sistemas análogos si concuerdan en relaciones claramente definibles de sus partes respectivas.

En sus lecciones de Metodología de la Enseñanza de la Matemática, el profesor soviético Dr. Nikolai Petrov expresa:

La analogía, como factor heurístico positivo, puede ayudar en tres direcciones:

1 puede aplicarse para que los alumnos descubran una proposición nueva para ellos, y la formulen;

2 puede sugerir el método y el procedimiento para la demostración de una proposición nueva;

3 puede sugerir la vía para la resolución de un problema, de un ejercicio.

A continuación se ofrece un ejemplo del empleo de la analogía en cada una de las direcciones anteriores.

Ejemplo 1

Al estudiar el cálculo de cuerpos, se obtiene la fórmula para el volumen de la pirámide a partir de la comparación con un prisma de igual base e igual altura, análogamente se procede para obtener la fórmula del volumen de un cono circular recto, comparándolo con el cilindro de igual área de la base e igual altura.

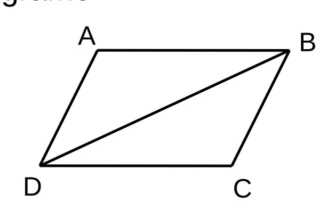
$V_{prima} = A_{b.}h$ ____________ $V_{cilindro} = A_{b.}h = \pi r^2 h$

$V_{pirámide} = \frac{1}{3} A_{b.}h$ ____________ $V_{cono} = \frac{1}{3} A_{b.}h = \pi r^2 h$

En este caso la analogía se utiliza para obtener una nueva proposición.

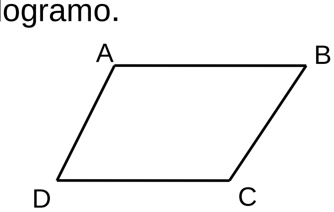
Ejemplo 2.

Igualdad de lados opuestos de un paralelogramo.



Para demostrar que $\overline{AB} = \overline{DC}$
Se prueba que:
Δ ABC = Δ ADC

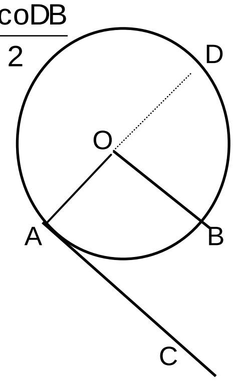
Igualdad de ángulos opuestos de un paralelogramo.



Para demostrar que el $<$ D = $<$ B
Se prueba que:
Δ ABC = Δ ADC

En este caso se encuentra la idea de la nueva demostración a partir de una generalización de la vía.
Ejemplo 3.

En la figura la semirrecta AC es tangente a la $C(o, \overline{OB})$ en A, y el $< AOB = 120^0$. Halla el $<$ BAC.



$$\text{Arco AB} = 180^0 \,,\ \text{Arco AD - Arco AB} = \text{Arco DB} \;;\ < A = \frac{\text{ArcoDB}}{2}$$

$$< DAC = < A + < BAC$$

$$< DAC - < A = < BAC$$

$$\frac{\text{ArcoAD}}{2} - \frac{\text{ArcoDB}}{2} = < BAC$$

Ejercicio. En la figura el $<$ AOB es un ángulo central y la semirrecta AC es tangente a la circunferencia en el punto alumnos Demuestra que : $< BAC = < \frac{< AOB}{2}$

La analogía sugiere la vía para la solución del ejercicio, o sea, se busca un prototipo de ejercicio ya conocido, se determinan los aspectos comunes y las diferencias entre los prototipos y el ejercicio planteado y se trata de resolver este utilizando los aspectos comunes y variando la vía de solución de acuerdo con las diferencias encontradas.

Es importante destacar que si se pretende enseñar al alumno las formas de trabajo y de pensamiento y de trabajo de la Matemática, se deben aprovechar estas situaciones para guiarlos, mediante impulsos, a descubrir la analogía y, de ese modo que él aplique conscientemente.

PRINCIPIO DE REDUCCIÓN.

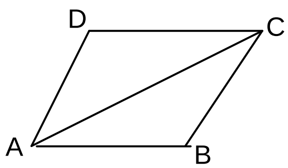
Este principio puede ser utilizado de cuatro formas diferentes :

1. La reducción de un problema a otro ya resuelto. Esta interpretación del principio de reducción es la más conocida. Con su ayuda puede encontrarse la vía para la solución de un problema. Por ejemplo : Resuelve $x^2 - 3x = 0$

$$x^2 - 3x = x\,(x - 3)$$
$$x = 0 \;\; y \;\; x - 3 = 0$$

La resolución de una ecuación de segundo grado puede reducirse a la resolución de ecuaciones lineales, (utilizando la descomposición en factores).

2. La recursión, esta forma del principio de reducción consiste en transformar lo desconocido acudiendo a lo conocido. Por ejemplo : Teorema sobre la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un cuadrilátero.



$$\Delta\ ADC: \quad < DAC + < ACD + < CDA = 180^0$$

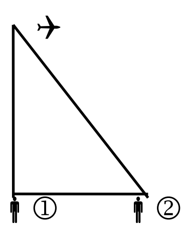
$$\Delta\ ABC: \quad \underline{< CAB + < ABC + < BCA = 180^0}$$

$$< DAC + < ACD + < CDA + < CAB + < ABC + < BCA = 360^0$$
$$< A + < B + < C + < D = 360^{\,0}$$

La demostración del teorema sobre la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un cuadrilátero se demuestra recurriendo al teorema sobre los ángulos interiores de un triángulo.

3. Otra forma de la reducción se presenta en la demostración de teoremas. Al demostrar un teorema aplicando un método de demostración cualquiera, se realiza una reducción del problema dado a problemas parciales o a otros problemas ; de manera que la resolución de esto resulte conocida o menos difícil que la del problema de partida. Ello puede lograrse de diferentes formas. Por ejemplo :
   - Descomponiendo el problema de demostración en problemas parciales, (cuando la tesis es una conjunción)
   - Haciendo una diferenciación de casos, (cuando no se puede demostrar un caso general que abarque todas las posibilidades). Esta es la situación para el teorema que expresa la relación entre el ángulo central y el ángulo inscrito en una circunferencia y la ley de los cosenos.
   - Reduciendo la demostración de la proposición a la de otra equivalente, (cuando se utiliza la reducción al absurdo o se demuestra el contrarrecíproco)
   - Reduciendo una refutación a la búsqueda de un contraejemplo, (cuando se conoce que no se cumple un caso particular).

4. La modelación es otra forma de reducción, que consiste en buscar una interpretación (un modelo) del problema dado, en otro dominio, con el fin de poder aplicar las leyes del nuevo dominio, a la resolución del problema transformado, y realizar la transformación inversa del modelo, para llegar a la resolución del problema de partida. Por ejemplo : Un hombre ve sobre su cabeza un avión que vuela a 800 m de altura, ¿a qué distancia ve el mismo avión otro hombre que se encuentra a 100 m de distancia del primero ?



PRINCIPIO DE INDUCCIÓN INCOMPLETA.

Consiste en llegar a la suposición de que existe una relación general, a partir del análisis de una serie de resultados particulares. (Se hace una generalización empírica)

PRINCIPIO DE GENERALIZACIÓN.

Permite obtener suposiciones para un conjunto de objetos, fenómenos o relaciones, a partir del análisis de un caso especial o particular. (Como se procede de forma reductiva, es necesario demostrar la validez de las suposiciones así obtenidas, al igual que en el caso del resto de los principios heurísticos)
Por ejemplo : En la obtención del teorema “los puntos de la mediatriz equidistan de los extremos del segmento“
El profesor ordena a los alumnos trazar un segmento, trazar su mediatriz y seleccionar diferentes puntos de la misma para medir sus distancias a los extremos del segmento.
Los resultados de los alumnos se colocan en una tabla, donde aparecen las longitudes de los segmentos y la relación existente entre ellos, y a partir de la relación entre ellos se

generaliza el resultado. (En este ejemplo se observan los Principios de Inducción Incompleta, Movilidad, Medir y Probar y Generalización).

PRINCIPIO DE MOVILIDAD.

Consiste en suponer que en figuras o cuerpos geométricos, un elemento es movible y, a partir de ello, analizar los cambios que se producen. Se aplica, generalmente en la búsqueda de suposiciones con el objetivo de provocar la variación de condiciones y propiciar la búsqueda de relaciones y dependencias. (Formas de trabajo y pensamiento de la Matemática que al aplicar este principio se hacen muy evidentes).
En el ejemplo anterior se manifiesta cuando se cambian de posición los puntos sobre la mediatriz del segmento.

PRINCIPIO DE MEDIR Y PROBAR. (También se conoce como medir y comparar)

Este proceder se emplea también en la búsqueda de suposiciones. Aparece, muy frecuentemente asociado al principio de la movilidad. O sea, se mide y prueba, o se mide y compara, después de haber ejecutado variaciones mediante la movilidad.
En el ejemplo dado de la mediatriz, se pone de manifiesto cuando el alumno mide las longitudes del punto a los extremos del segmento.

PRINCIPIO DE LA CONSIDERACIÓN DE CASOS ESPECIALES Y CASOS LÍMITES.

Es útil para obtener nuevos conocimientos a partir del establecimiento de relaciones entre los conocimientos adquiridos.
Por ejemplo : $V_{\text{prisma}} = A_B\, h \xleftrightarrow{\text{CASO ESPECIAL}} V_{\text{cubo}} = a^3$ Por ser $A_B = a^2$ y $h = a$

$$A_{\text{trapecio}} = \frac{a+c}{2}h \xleftrightarrow{\text{CASO LÍMITE}} A_{)} = \frac{a}{2}h \quad \text{con } c = 0$$

LAS ESTRATEGIAS HEURÍSTICAS.

Las estrategias heurísticas constituyen los procedimientos principales para buscar los medios matemáticos concretos que se necesitan para resolver un problema en sentido amplio y para buscar la idea fundamental de solución, por lo que, se les llama también estrategias de búsqueda.

Existen dos estrategias heurísticas que pueden ser aplicadas a cualquier tipo de ejercicio (estrategias generales o universales), ellas son: **el trabajo hacia adelante o método sintético** y el trabajo hacia atrás o método analítico**.**

Otras estrategias se refieren a determinados tipos de ejercicios por lo que se denominan especiales. Entre ellas podemos mencionar el "Esquema de Descartes", utilizado generalmente para resolver ejercicios de cálculo de magnitudes, el "método de los lugares geométricos" y el "método de las transformaciones" que se emplean en los ejercicios geométricos de construcción.

Analicemos más detenidamente las estrategias universales.

La estrategia de trabajo hacia adelante se caracteriza porque las reflexiones para hallar la idea de la solución parten de los datos y de ellos se deduce lo que se busca, pasando por una serie de pasos intermedios, apoyándose en los conocimientos que se tienen, de manera que se obtenga la cadena de ideas que permite elaborar el plan de solución. La estrategia consiste en buscar cuáles objetivos parciales o resultados intermedios se pueden alcanzar partiendo de las condiciones previas o elementos dados.

A continuación presentamos un ejercicio a modo de ejemplo.

"Demuestre que en todo triángulo, la mitad del perímetro es mayor que la longitud de cada lado".

P: ABC triángulo cualquiera T: $a < \frac{a+b+c}{2}$

Una posibilidad de encontrar los medios y la idea de la demostración, trabajando hacia adelante, puede ser con ayuda de las siguientes preguntas (en la medida que ello resulte necesario):
¿Qué datos ofrece la premisa?
¿Qué se puede plantear a partir de ella, que tenga relación con lo que se quiere probar?
¿Qué conocimientos tenemos que nos permitan relacionar los lados de triángulos cualesquiera?

Estas preguntas orientan las reflexiones de los alumnos a partir de la premisa y utilizando la desigualdad triangular, tratar de llegar a establecer la tesis.

$$\begin{array}{l} a < b + c \\ \underline{a = a} \\ a + a < a + b + c \\ 2a < a + b + c \\ a < \frac{a+b+c}{2} \end{array}$$

La comparación con la tesis sugiere sumar **a** en ambos miembros de la desigualdad
Efectuando se observa que al dividir por 2
se obtiene lo que se busca

La utilización práctica por parte de los alumnos de la estrategia del trabajo hacia adelante requiere de un entrenamiento, no es posible lograr, de un día para otro o en un período breve de tiempo que nuestros alumnos puedan aplicar esta estrategia.

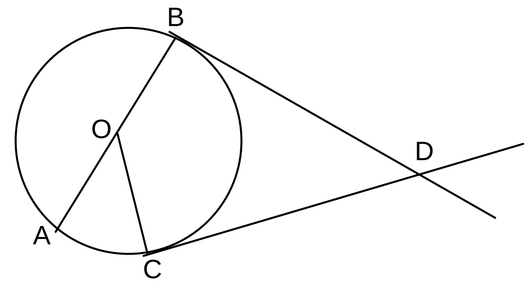
Particularmente adecuados pueden resultar ciertos tipos de ejercicios en el entrenamiento de los alumnos para la utilización de esta estrategia de trabajo en la búsqueda de ideas de solución, ejemplo de ellos pueden ser los siguientes:

1. En la circunferencia de centro o y diámetro $\overline{AB}$. A, B y C puntos de la circunferencia DC y DB son tangentes en C y B respectivamente.

a) ¿Cuántos ángulos se forman en la figura?. Identifícalos con números naturales a partir del 1.

b) ¿ Cuál es toda la información que se puede extraer sobre los ángulos de la figura a partir de los datos que se ofrecen?

c) ¿Supongamos además que $\overline{OC}$ es bisectriz del < ACB ?. ¿ Cuáles son entonces todos los ángulos iguales a < OCB?.



2. Un terreno rectangular tiene 40 m más de largo que de ancho. Si tuviese 20 m menos de largo y 10 m más de ancho su área sería la misma.
   a) Elabora un esbozo o figura de análisis que pueda representar la situación planteada.
   b) Introduce la menor cantidad posible de variables para representar las magnitudes dadas.
   c) ¿Es posible establecer alguna relación matemática entre las magnitudes dadas, a partir de la situación planteada?.

El trabajo hacia atrás se caracteriza por el examen previo de lo que se busca, apoyándose en los conocimientos que se tienen, analizar posibles resultados intermedios de los que se puede deducir lo buscado (y cada resultado intermedio anterior) hasta llegar a los datos. De modo que recorriendo el razonamiento a la inversa se tiene la idea de la solución. El análisis empieza por tanto, por lo que se busca y la orientación para encontrar la idea de la solución se encuentra en el establecimiento de las relaciones entre los datos, los resultados intermedios obtenidos y las exigencias del problema.

En el ejercicio analizado en el ejemplo anterior (de trabajo hacia adelante), puede resultar difícil darse cuenta de la idea de la solución, partiendo únicamente del análisis de la premisa dada; sin embargo, aplicando el trabajo hacia atrás (transformando la tesis) se logra establecer relaciones con la premisa (ABC triángulo cualquiera) que pueden sugerir los medios a utilizar y, con ello, la idea de la demostración.

Se busca: $a < \frac{a+b+c}{2}$ lo que equivale a

$2a < a + b + c$ (buscamos una relación entre los lados de un triángulo cualquiera)

$a + a < a + b + c$

$a < b + c$

Como se conoce que para todo triángulo es siempre posible plantear esta relación (desigualdad triangular) y que también, aplicando teoremas conocidos (propiedades de las operaciones con desigualdades) se pueden lograr las transformaciones necesarias (en sentido inverso a lo realizado) se tiene ya resuelto el problema.
También para el empleo exitoso de esta estrategia se requiere de una adecuada preparación de los alumnos. En este caso hay que lograr una sistematización de los conocimientos que organice los mismos en disposición de ser aplicados. La sistematización de los

conocimientos tomando como base las condiciones partir de las cuales estos pueden ser lógicamente inferidos, constituyen un entrenamiento de especial atención.

Para ello pueden ser recomendables preguntas como las siguientes, a formular en momentos adecuados durante las clases:

¿Cuáles son todas los conocimientos sobre triángulos de que disponemos hasta el momento que nos permiten afirmar que dos ángulos son iguales? Cuáles que dos lados son iguales?
¿ Cuáles son los conocimientos sobre cuadriláteros que nos permiten afirmar que dos ángulos (lados) son iguales?
¿ Bajo que condiciones podemos afirmar que dos rectas son paralelas (perpendiculares)?
¿Cuáles son las figuras geométricas que conoces con ángulos iguales? (que suman 90^0, que suman 180^0)
¿Qué conocimientos matemáticos nos permiten relacionar mediante fórmulas longitudes de segmentos (amplitudes de ángulos, longitudes de lados y amplitudes de ángulos?

Todas estas preguntas tienen respuesta en dependencia de los conocimientos adquiridos por los alumnos y en cada caso para su respuesta requieren de una reestructuración del orden habitual en que los mismo fueron tratados y el establecimiento de nuevas relaciones entre ellos, en función de cómo puede ser necesario recordarlos para su posterior aplicación. También con ayuda de hojas de trabajo para completar espacios en blanco convenientemente seleccionados se puede propiciar esta preparación.

LAS REGLAS HEURÍSTICAS.

Las reglas heurísticas tienen el carácter de impulsos dentro del proceso de búsqueda de nuevos conocimientos y de la resolución de problemas.

Se distinguen de los principios por el alcance de su aplicación, pues ellas no sugieren directamente la idea principal de solución pero ofrecen recomendaciones de gran utilidad para llegar a encontrarlas, ya que expresan las acciones y operaciones a realizar en la búsqueda de los medios matemáticos y de las vías de solución a problemas de dominio matemático o extramatemático.
En la clase de matemática se utilizan con frecuencia para guiar el pensamiento de los alumnos, ofreciéndolas como sugerencias, indicaciones o en forma de preguntas.

Las reglas heurísticas se consideran generales si ellas encuentran aplicación para la búsqueda de la idea de la solución a variados tipos de problemas, y especiales cuando se aplican en un tipo específico de problema.

Los tipos de tareas que se presentan en la enseñanza de la matemática con el carácter de problemas son: los ejercicios de aplicación intramatemáticos (de demostración, también en particular de deducción, ejercicios de construcción, etc.,) y de aplicación a dominios extramatemáticos. Cuando el aprendizaje de los alumnos se dirige con un enfoque "problémico" también se considera que la definición o caracterización de conceptos y la búsqueda de nuevas fórmulas, proposiciones " procedimientos tienen el carácter de problemas en la enseñanza de la matemática. Ante todos estos tipos de tareas con carácter

de problema encuentran aplicación, entre otras, las reglas heurísticas generales:
- Separa lo dado de lo buscado.
- Recuerda conocimientos relacionados con lo dado y lo buscado.
- Busca relaciones entre los elementos dados y lo buscado.

Existen otras reglas heurísticas que pueden considerarse especiales pues se refieren a determinados tipos de problemas.

Por ejemplo:
a) Para los ejercicios de demostración en la geometría es útil la siguiente regla:
"Si tienes que demostrar la igualdad de longitudes o amplitudes, trata de encontrar triángulos congruentes que contengan esos segmentos o ángulos homólogos”.

b) Para los ejercicios geométricos de construcción es muy usada la regla heurística:
"Si la figura buscada no te conduce inmediatamente al éxito, trata de obtener, mediante líneas auxiliares, figuras que te sean fáciles de construir"

c) Para los problemas de dominio matemático en que se ofrecen como datos longitudes de segmentos y amplitudes de ángulos, frecuentemente es útil acudir a las razones trigonométricas.

Mencionaremos a continuación las reglas heurísticas que se emplean con mayor frecuencia en el tratamiento de las tareas que en la enseñanza de la matemática tienen el carácter de problemas..

<u>En la resolución de problemas extramatemáticos.</u>

- Separar los datos de las incógnitas.
- Confeccionar una figura de análisis, tabla o esbozo.
- Representar las magnitudes dadas y buscadas con variables.
- Representar las relaciones contenidas en el texto del problema mediante fórmulas o ecuaciones.
- Buscar las relaciones entre datos e incógnitas utilizando números más simples en el lugar de los dados.
- Reformular el problema.

<u>En la resolución de ejercicios de construcción</u>.

- Separar lo dado y lo buscado.
- Elaborar una figura de análisis, un esbozo de lo que se busca (suponer el problema ya resuelto).
- Comparar lo que se tiene con lo buscado.
- Analizar que se puede trazar de inmediato.
- Precisar que falta todavía.
- Sustituir los conceptos por su definición.
- Recordar teoremas del dominio matemático correspondiente.
- Completar la figura con líneas auxiliares.

<u>En la demostración de teoremas</u>.

- Separar premisa y tesis.
- Confeccionar una figura de análisis.
- Tener en cuenta que no constituya un caso especial.
- Completar la figura con líneas auxiliares.
- Recordar teoremas del dominio matemático correspondiente.
- Sustituir conceptos por definiciones o viceversa.
- Analizar la tesis para seleccionar el método de demostración.
- Transformar la tesis en una expresión equivalente.
- Buscar teoremas con tesis iguales.
- Buscar teoremas con hipótesis iguales.
- Observar, primero, un caso particular.

<u>En la deducción de teoremas</u>.

- Recordar teoremas del dominio matemático correspondiente.
- Sustituir conceptos por sus definiciones o viceversa.
- Confeccionar una figura de análisis.
- Completar la figura con líneas auxiliares.
- Sustituye sistemáticamente las variables que surgen en función de la variables deseadas.

Veamos mediante un ejemplo, la aplicación de algunas reglas heurísticas en la búsqueda de la idea de la demostración de un teorema.

"El área de un triángulo es igual al semiproducto de las longitudes de dos lados por el seno del ángulo que estos forman"

IMPULSOS DEL PROFESOR	REGLAS HEURÍSTICA
• Lean el enunciado	• Separar premisa y tesis
• Analicen si es conveniente representar gráficamente los elementos que se relacionan	• Confeccionar una figura de análisis
• Introduzcan las notaciones convenientes	
• Expresen la tesis considerando una expresión equivalente.	• Transformar la tesis en una expresión equivalente, de acuerdo con las notaciones introducidas.
• ¿Qué fórmula conocemos para calcular el área de un triángulo ?	• Recordar teoremas del dominio matemático correspondiente.
• ¿Aparecen esos elementos en la figura ?	• Completar con líneas auxiliares.
• Comparen la tesis con la fórmula conocida. ¿En qué elementos se diferencian ?	• Analizar la tesis.
• Sustituye esos elementos expresándolos en términos de los conceptos contenidos en el enunciado.	• Sustituir conceptos por sus definiciones.

Mediante este trabajo los alumnos pueden llegar a encontrar los medios matemáticos necesarios para la demostración de ese teorema, pero lo que es mucho más importante, si esto se hace sistemáticamente, adquieren y fijan la forma de trabajo que les permitirá demostrar otros, muchos teoremas, independientemente, pues se logra crear en ellos una sucesión de reflejos condicionados que permite que esas reglas se conviertan en suyas.

EL PROGRAMA HEURÍSTICO GENERAL.

Para la planificación y dirección de los procesos de resolución de problemas se utilizan los llamados programas heurísticos.

De interés especial resulta el conocido como programa heurístico general, el cuál constituye para el profesor el instrumento universal de dirección, y para el alumno una base de orientación para el trabajo con problemas.

PROGRAMA HEURISTICO GENERAL

FASES FUNDAMENTALES	TAREAS PRINCIPALES
1. Orientación hacia el problema	• Comprensión del problema
2. Trabajo en el problema	• Búsqueda de la idea de la solución. Incluye reflexiones sobre : ➢ Medios matemáticos ➢ Vía de solución
3. Solución del problema	• Ejecución del plan
4. Evaluación de la solución y de la vía	• Comprobación de la solución • Reflexión sobre los métodos aplicados.

De estas fases fundamentales, la segunda tiene la mayor importancia desde el punto de vista metodológico pues en la resolución de problemas lo esencial y más difícil es la búsqueda de la idea de la solución, y para ello la aplicación de los procedimientos heurísticos resulta imprescindible.
No obstante es necesario puntualizar que la realización exitosa de esta segunda fase está muy estrechamente relacionada con el trabajo en la cuarta fase en lo relativo a "la reflexión sobre los métodos aplicados".
Los ejercicios o grupos de ejercicios que se trabajen con los alumnos deben ser portadores de un "mensaje" dirigido a los alumnos y mediante el cuál ellos adquieran una "ganancia metodológica" que les permita encontrar cada vez con mayor independencia ideas de soluciones a ejercicios.

La "**ganancia metodológica**" puede estar dirigida a que los alumnos comprendan:

- Las posibilidades de utilización de los conocimientos matemáticos en la resolución de ciertos tipos de ejercicios.

- Así luego de resolver varios ejercicios de demostración en que se pide probar la congruencia o igualdad de lados (o ángulos) con ayuda de la congruencia de triángulos se puede hacer comprender a los alumnos la regla heurística especial relativa a la demostración de igualdad de longitudes o amplitudes.

- Los pasos que son necesarios realizar para resolver los ejercicios con carácter de problema (tareas principales de cada fase del programa heurístico general) y las posibles formas para su ejecución.

De este modo una vez resuelto el ejercicio referido a demostrar que en todo triángulo, la mitad del perímetro es mayor que la longitud de cada lado; se puede analizar con los alumnos cómo se procedió" en la búsqueda de la idea de la solución y concluir según el caso:

- Para encontrar la vía de la solución se puede partir de los datos y tratar de inferir toda la información posible que nos pueda conducir a lo que queremos demostrar (trabajo hacia adelante).
- Para encontrar la vía de la solución se puede partir de lo que queremos probar y razonar al revés (trabajo hacia atrás).
- Para encontrar los medios matemáticos necesarios hay que pensar en los conocimientos que se tienen que se relacionan con la información contenida en el ejercicio.

Para lograr en los estudiantes una orientación adecuada en el trabajo con ejercicios que tienen el carácter de problemas, el profesor debe emplear este programa heurístico general como instrumento de dirección del trabajo. Al mismo tiempo debe hacer explícito el uso de los diferentes procedimientos aplicados en él, de modo que los estudiantes los vayan asimilando conscientemente. Se trata de explicar a los alumnos cómo se puede actuar para hallar soluciones a problemas y no de explicar las solución hallada.

A partir de este programa general pueden elaborarse programas heurísticos particulares para cada uno de los tipos de tareas con carácter de problema antes citadas, pero ese no es el propósito de este trabajo.

A continuación se ofrece un ejemplo de aplicación de este programa a la enseñanza de la matemática. En él se señalan los impulsos que puede brindar el profesor para la aplicación de los procedimientos heurísticos por sus alumnos, fundamentalmente en la fase de trabajo con el problema.

En el tratamiento de las diferentes situaciones típicas de la enseñanza de la matemática utilizando los programas heurísticos es conveniente elaborar sucesiones de indicaciones con carácter heurístico para la orientación de las acciones de los alumnos, las cuales, si se utilizan sistemáticamente, permiten que se familiaricen con ellas y se incorporen, de manera natural, a su forma de trabajo y pensamiento.

Por ejemplo, al tratar problemas o ejercicios con texto utilizando el programa heurístico general se hacen evidentes al alumno cuatro etapas que, según el eminente matemático húngaro George Polya se distinguen en el proceso de resolución de todo problema:

- **Comprender el enunciado del problema**
- **Encontrar la vía de solución. Elaboración de un plan.**
- **Realizar el plan elaborado**
- **Comprobar la solución y evaluarla críticamente.**

Para cada una de ellas es posible elaborar sucesiones de indicaciones que servirán como base de orientación para el trabajo del alumno.

Una sucesión de indicaciones para la primera etapa, pudiera ser:

- Lee el problema cuidadosamente
- Reproduce el contenido con tus propias palabras

- ♦ Separa lo que se da y lo que se busca
- ♦ Confecciona, si es posible, una figura de análisis que ilustre la situación.

También pueden elaborarse sucesiones de indicaciones para determinados aspectos dentro de una etapa. Por ejemplo, para sugerir al alumno el uso de la estrategia de trabajo hacia adelante en la demostración de teoremas puede utilizarse la siguiente:

- ∗ Busca teoremas con premisas iguales
- ∗ Selecciona uno o varios de ellos y realiza deducciones a partir de las premisas
- ∗ Introduce, si es necesario, nuevas denominaciones, líneas auxiliares y magnitudes auxiliares
- ∗ Realiza inferencias de las nuevas condiciones hasta que se pueda deducir la tesis.

Un trabajo como este permite la participación activa y consciente del alumno en el proceso de aprendizaje, lo que constituye la base del desarrollo de habilidades y capacidades.

Ahora bien, para lograr que los alumnos apliquen conscientemente las formas de trabajo heurístico, es necesario tener en cuenta las siguientes medidas didáctico - metodológicas para la asimilación de las formas de trabajo heurístico:

1. **Familiarizar previamente a los alumnos con los procedimientos que deben aprender. Seleccionar ejemplos apropiados para introducir los procedimientos.**
2. **Formular, concisa y cabalmente, los procedimientos que los alumnos deben aprender, de manera que les sean completamente comprensibles.**
3. **Hacer conscientes a los alumnos de las ventajas que ofrece el empleo, de los procedimientos heurísticos, para propiciar la generalización de su uso.**
4. **Capacitar a los alumnos, mediante su participación activa, para aplicar independientemente reglas, principios, estrategias y programas heurísticos.**
5. **Aprovechar todos los momentos de la clase para que los alumnos practiquen la utilización de las formas de pensamiento y de trabajo de la matemática.**
6. **La racionalización de la actividad mental es una necesidad de la sociedad y, un objetivo de la enseñanza de la matemática. Ello exige que en la clase de matemática se apliquen conscientemente procedimientos heurísticos en la dirección y desarrollo de la actividad mental de los alumnos.**

Para que el alumno logre asimilar y aplicar estos procedimientos independientemente es necesario que el maestro desarrolle una verdadera instrucción heurística, lo que sólo podrá asegurarse si se elabora un plan a largo plazo, que le permita trabajar sistemáticamente teniendo en cuenta las medidas didáctico - metodológicas antes citadas.