

Tema: La dirección del proceso de enseñanza – aprendizaje a través de las clases de la asignatura Matemática

Título: La capacitación de los alumnos para modelar y hacer transferencias de una forma de representación a otra de objetos y situaciones matemáticas.

Autores: MSc. Aurelio Quintana Valdés
MSc. Margarita Gort Sánchez
MSc. Lourdes Báez Arbezú
Lic. Jesús Cantón Arenas

Introducción

El artículo se refiere a la capacitación de los alumnos para modelar y hacer transferencias de una forma de representación a otra de objetos y situaciones matemáticas.

Se tratará de mostrar cómo a través de variadas formas de presentación de los contenidos, de su contextualización y descontextualización, de su generalización y particularización, se puede lograr que los alumnos aprendan a hacer transferencias de una forma de representación a otra de objetos y situaciones matemáticas, e incluso, puedan crear sus propias representaciones o modelos matemáticos.

Esto reviste importancia capital porque la modelación de situaciones con ayuda de conceptos matemáticos es parte integrante de la educación científica de todo ciudadano, por cuanto le permite comprender la realidad y orientarse en el mundo que le rodea y además contribuye a la resolución de ejercicios y problemas. No se trata solo de la aplicación de algoritmos y procedimientos que los alumnos pueden tener a su disposición, sino sobre todo de la aplicación, profundización y desarrollo de conceptos matemáticos.

Desarrollo

El hecho de transferir de una forma de representación a otra de objetos y situaciones matemáticas lo cual es muy frecuente en esta asignatura se puede ilustrar a través de muchos ejemplos pero se hará específicamente en el trabajo con los números.

Desde la primaria los niños aprenden la conveniencia de representar números de diferentes maneras según el contexto, lo cual es tratado en los diferentes niveles de enseñanza, donde se aprende a interpretar y distinguir entre las distintas formas de presentar los objetos y las situaciones matemáticas, así como las interrelaciones entre ellas y de elegir las más conveniente según la situación planteada.

Por ejemplo:

Los alumnos aprenden a comparar números en sus diferentes formas y dado un par de números cualesquiera pueden decidir si uno es mayor, menor o igual a otro

y teniendo en consideración su estructura o apoyándose en el rayo o la recta numérica, el alumno es capaz de hacer comparaciones. Una forma en que el alumno puede hacer la transferencia de esa forma de representación a otra es cuando le presentamos un ejercicio como el siguiente:

11. En la recta numérica se han representado los números 0, a, b y c. (Todas las subdivisiones son iguales)
 ¿Cuál de las siguientes proposiciones es la verdadera?

1) $-b < 0$ (32,6%) 2) $-c = a$
 3) $b > a$ 4) $c < b$

En el ejercicio se pide establecer la comparación entre números pero de una forma general (utilizando variables) sobre la base de su posición en la recta numérica y de conceptos que permiten establecer la relación.

1) Para decidir en el primer caso el alumno observa que como b está a la izquierda del 0 es menor que cero y que por tanto $-b$ que es su opuesto representa un número positivo el cual no puede ser menor que 0

2) Para decidir en el segundo caso, $-c$ tiene el mismo comportamiento que $-b$ basta entonces analizar su posición a la derecha del cero y compararlo con a llegando a la conclusión de que coinciden y que por tanto se cumple la proposición.

Aunque ya fue identificada la proposición verdadera es necesario discutir con los alumnos el porqué las otras son falsas.

3) En este caso es falsa pues b es un número negativo y a es positivo por tanto $b < a$

4) En este caso se establece la comparación entre dos números negativos y como c está más próximo al cero que b será mayor.

Como se pudo apreciar hay transferencia en la forma de representación y para su solución se evidenció la necesidad del dominio de conceptos y propiedades básicas para solucionar el ejercicio.

Relativamente a la idea de **modelar**, está considerada como una de las competencias específicas de la asignatura muy necesaria para resolver ejercicios y problemas.

Modelar es un proceso que consta de varias fases, las cuales se señalan a continuación:

✓ 1ra fase: **Matematizar** (elaborar un modelo de la situación)

La matematización puede ser de dos clases: Una tiene lugar al presentarse una **situación real o supuesta** como tal, que requiere la recuperación, precisión y

representación de la información dada a través de una ecuación, una función, un gráfico, u otro objeto matemático.

Por ejemplo cuando se le exige a los alumnos que resuelvan un problema con texto que conduce a una ecuación.

La otra tiene lugar al presentarse una situación en la que intervienen objetos matemáticos, la cual **exige de la determinación de propiedades y relaciones entre esos objetos matemáticos**, es decir, requiere de la determinación de la estructura matemática de la situación.

Por ejemplo cuando se le exige a los alumnos que realicen una demostración, o una construcción geométrica lo cual se estructura a través de propiedades y relaciones donde se construye un plan de solución el cual va a ser un modelo, sea el caso de la construcción de la mediatriz de un segmento, o de demostrar que todos los puntos de la mediatriz de un segmento equidistan de sus extremos. Este subproceso requiere la abstracción de determinados aspectos de la situación presentada, que son irrelevantes desde el punto de vista matemático.

✓ 2da fase: **Procesar el modelo** (extraer consecuencias del modelo)

El procesamiento puede ser un proceso algorítmico, el desarrollo de un plan de construcción, una demostración, entre varias posibilidades. En consecuencia, como resultado del procesamiento se puede obtener una solución numérica o gráfica, ciertas inferencias lógicas, un juicio cualitativo o una argumentación, entre otras.

✓ 3era fase: **Interpretar** las consecuencias a la luz de la situación dada para determinar los resultados finales.

A veces las consecuencias o resultados parciales obtenidos no se ajustan a la situación planteada y se requiere realizar otras consideraciones antes de considerar el proceso de modelación terminado. Es necesario ir del dominio matemático, a la situación inicial planteada, para decidir cuáles son los resultados que satisfacen las exigencias.

Por ejemplo en diversos problemas que se modelan a través de una ecuación o sistema los valores de las variables obtenidos no son los que dan solución al problema.

✓ 4ta fase: **Validar** el modelo

En la dinámica del aula es necesario valorar cuáles de los modelos utilizados son correctos, cuáles no, por qué, cuál es el mejor, propiciando el intercambio de argumentos entre los alumnos y entre estos y el profesor.

Se presentan algunos aspectos claves, en torno a los cuales se van a estructurar las reflexiones y que están directamente relacionados con las fases del proceso de modelación.

- ✓ Elaborar modelos para situaciones de estructura matemática familiar o no, y diferentes por su contexto.
- ✓ Hacer corresponder a un modelo situaciones que se pueden modelar a través de él.
- ✓ Interpretar los resultados de la modelación y comprobarlos en la situación inicial.
- ✓ Reflexionar y evaluar críticamente los modelos matemáticos utilizados.

Observe cómo se manifiestan estos aspectos en ejemplos concretos

- ✓ Elaborar modelos para situaciones de estructura matemática familiar o no, y diferentes por su contexto.

Ejemplo

Una persona debe recorrer dos quintas partes de una determinada distancia en auto, el 50% del resto en ómnibus y los 150 km restantes en tren. ¿Cuál es la distancia total a recorrer por la persona?

El alumno tiene que obtener primeramente una idea global de la situación, después descomponerla en partes para obtener informaciones particulares y comprender las relaciones entre ellas, para por último, relacionar esas informaciones y relaciones con los conocimientos previos que ya posee o con los que puede extraer de otras fuentes. Esto corresponde a las distintas fases del proceso de comprensión de un texto, a saber, traducir, interpretar y extrapolar.

Es necesario alertar sobre dos cuestiones esenciales. Por una parte sobre aquellos ejercicios con texto que por su similitud con otros que se les plantean a los alumnos, no requieren prácticamente que estos reflexionen para saber el modelo a utilizar. Por otra parte, también se quiere enfatizar que este momento de la matematización, que corresponde a la fase de trabajo en el problema del programa heurístico general, es el de mayor dificultad para los alumnos y es muy importante que los docentes consideren, previo a la clase, qué preguntas e impulsos se les deben plantear a los alumnos para que puedan por sí mismos llegar a la determinación del modelo que describe la situación planteada.

Vamos a referirnos ahora al segundo aspecto.

- ✓ Hacer corresponder a un modelo, situaciones que se pueden modelar a través de él.

Ejemplo

Crea una situación que se corresponda con la ecuación $\frac{1}{2}x - 15 = 120$

Se puede modelar de las formas siguientes:

.La mitad de un número disminuido en 15 es igual a 120.

.La mitad de la cantidad de pioneros de 7^{mo} grado excede en 15 a los 120 que integran la tabla gimnástica.

- ✓ Interpretar los resultados de la modelación y comprobarlos en la situación inicial. (este aspecto es algo que con frecuencia se obvia en la dinámica de la clase y sin embargo, revista una importancia especial)

Ejemplo Determina todos los valores reales negativos para los cuales se cumple que la diferencia entre un número real (distinto de cero) y su recíproco sea un número real no negativo..

Dadas las condiciones del problema conduce a modelarlo mediante una inecuación. Es importante tener presente la condición de no negativo para establecerla.

Es importante destacar que la solución de la inecuación que se modeló, no da respuesta a la situación inicial planteada de ahí la necesidad de interpretarlos y comprobarlos.

Existen muchos otros casos más en que se pone de manifiesto esta situación, al resolver ecuaciones e inecuaciones logarítmicas donde hay que reflexionar en torno al dominio etc.

- ✓ Reflexionar y evaluar críticamente los modelos matemáticos utilizados.

Retomando el ejemplo sobre el problema típico de fracciones presentado anteriormente podemos referirnos a que en este tipo de problemas se presentan muchas dificultades para establecer el modelo, dificultades estas que parten desde la enseñanza primaria hasta la media superior y entre otras dificultades se evidencia que no se reflexiona en cuanto al modelo.

- Sí se corresponde con el texto.
- Sí el modelo es viable o si se puede utilizar otro o modificarlo.
- Sí la respuesta es lógica y da solución a las condiciones dadas etc.

Algunas consideraciones sobre errores de los alumnos y recomendaciones particular a los docentes.

Un error frecuente de los alumnos, reside en que estos tienden a representar las relaciones que aparecen en un texto, en el mismo orden en que estas aparecen, de modo que si se les plantea que por cada tazas hay tres platos, tienden a escribir $t = 3p$, donde t denota el número de tazas y p , el número de platos, lo cual es falso porque la situación se debería representar por $3t = p$.

Ya en el orden de las recomendaciones una cuestión esencial, es que no se deje para el final de la subunidades temáticas el desarrollo de ejercicios que exijan la

modelación, sino que aprecien el planteamiento de estos ejercicios como una vía de desarrollar conceptos y métodos matemáticos importantes.

Además, una dificultad grande en las aulas estriba en el hecho de considerar que los alumnos con dificultades solo pueden resolver ejercicios rutinarios y no se les plantean tareas que exijan de ellos que modelen.

¿Sobre la base de qué criterios el docente pudiera determinar los niveles de logro que van teniendo sus alumnos para modelar?

Existen efectivamente criterios que permiten diferenciar niveles de logro, o de desempeño, en los alumnos.

1er Nivel: Reconocer ante situaciones dadas modelos típicos que exigen un solo paso. **Hacer corresponder** objetos matemáticos a situaciones sencillas de la realidad. **Comparar** si los resultados de una modelación son razonables,

2do Nivel: Elaborar modelos que exigen varios pasos para situaciones de estructura matemática relativamente sencilla, pero en diferentes contextos. **Hacer corresponder** a un modelo situaciones que se pueden modelar a través de él. **Interpretar** los resultados de la modelación y comprobarlos en la situación inicial.

3er Nivel: Desarrollar modelos de varios pasos para situaciones de estructura matemática compleja o no familiar. **Reflexionar y evaluar** críticamente los modelos utilizados.

Conclusiones

La capacitación de los alumnos para modelar y hacer transferencia de una forma de representación a otra de objetos y situaciones matemáticas constituye una necesidad y los profesores deben potenciar este trabajo desde las clases, no se quiere finalizar sin hacer las precisiones siguientes:

En la **primaria** los alumnos deben ser capaces de:

Establecer relaciones en distintas situaciones a través de modelos, representar dichas relaciones e interpretarlas.

En la enseñanza **media básica y superior** además de esto deben ser capaces de Identificar las relaciones que se establecen, seleccionar, modificar y crear sus propios modelos así como evaluarlo y valorarlo.

Bibliografía:

Ballester Pedroso, Sergio et al. Metodología de la Enseñanza de la Matemática I. Editorial Pueblo y Educación. La Habana, Cuba, 1993

_____. Metodología de la Enseñanza de la Matemática II. Editorial Pueblo y Educación. La Habana. Cuba,

- _____. Cuaderno de tareas, ejercicios y problemas de Matemática. Séptimo Grado. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana. Cuba, 2001
- _____. El transcurso de las líneas directrices en los programas de Matemática y la Planificación. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana. Cuba, 2002
- Colectivo de autores. Matemática 7^{mo}, Editorial Pueblo y Educación. La Habana. Cuba, 1978
- Colectivo de autores. Matemática 8^{vo}. Editorial Pueblo y Educación. La Habana. Cuba, 1978
- Colectivo de autores. Matemática 9^{no}. Editorial Pueblo y Educación. La Habana. Cuba, 1978
- Colectivo de autores. Matemática 7^{mo}. Cuadernos Complementarios. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana. Cuba, 2005
- Colectivo de autores. Matemática 8^{vo}. Cuadernos Complementarios. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana. Cuba, 2006
- Colectivo de autores. Matemática 9^{no}. Cuadernos Complementarios. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana. Cuba, 2005
- Torres, Paúl. La enseñanza de la Matemática en Cuba en los umbrales del siglo XXI logros y retos. Ponencia electrónica de COMPUMAT 2000. Sociedad Cubana de Matemática y Computación. Instituto superior Pedagógico "Blas Roca Calderio". Manzanillo. Cuba.